XXVIII OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2022

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar máquina de calcular; não podes consultar livros nem apontamentos.
Justifica cada uma das tuas respostas.
Ao participar comprometes-te a não divulgar os problemas até 30 de maio.

PROBLEMA 1

Num tabuleiro quadriculado 7×7, algumas quadrículas estão pintadas de vermelho. Seja a o número de linhas que têm um número ímpar de quadrículas vermelhas e seja b o número de colunas que têm um número ímpar de quadrículas vermelhas. Determina todos os valores possíveis de $a + b$.
Para cada valor determinado, indica um exemplo de como pode estar pintado o tabuleiro.

PROBLEMA 2

Em nove cartões estão escritos os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, um algarismo em cada cartão.
Usando todos os cartões formam-se alguns números (por exemplo, podem-se formar os números 8, 213, 94, 65 e 7)

a) Se todos os números formados são primos, determinar o valor mínimo possível da sua soma.
b) Se todos os números formados são compostos, determinar o valor mínimo possível da sua soma.

Nota: Um número p é primo se os seus únicos divisores são 1 e p. Um número é composto se tem mais do que dois divisores. O número 1 não é primo nem composto.

PROBLEMA 3

Sejam $[ABCD]$ um quadrado, E um ponto do lado $[CD]$ e F um ponto do interior do quadrado tal que o triângulo $[BFE]$ é isósceles e $B\hat{F}E = 90°$. Se $\overline{DF} = \overline{DE}$, determina a medida do ângulo FDE.

PROBLEMA 4

a) Em cada vértice de um triângulo escreve-se um inteiro positivo. De seguida, em cada lado do triângulo escreve-se o máximo divisor comum dos seus extremos. É possível que os números escritos nos lados sejam três inteiros consecutivos, por alguma ordem?
b) Em cada vértice de um tetraedro escreve-se um inteiro positivo. De seguida, em cada aresta do tetraedro escreve-se o máximo divisor comum dos seus extremos. É possível que os números escritos nas arestas sejam seis inteiros consecutivos, por alguma ordem?

PROBLEMA 5

Num quadro estão marcados os vértices de um polígono regular de N lados. A Ana e o Beto jogam alternadamente e a Ana é a primeira. Cada jogador, na sua vez, pode fazer uma das seguintes ações:

- unir dois vértices através de um segmento, sem intersetar outro segmento já marcado; ou
- apagar um vértice que não pertença a nenhum segmento marcado.

O jogador que, na sua vez, não possa realizar nenhuma ação perde o jogo.
Determinar qual dos jogadores pode garantir a vitória:

a) se $N = 28$;
b) se $N = 29$.

Nota: Dois segmentos marcados podem partilhar um vértice.