XXVII OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2021

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar máquina de calcular; não podes consultar livros nem apontamentos.
<u>Justifica cada uma das tuas respostas.</u>
Ao participar comprometes-te a não divulgar os problemas até 30 de maio.

PROBLEMA 1

No quadro estão escritos os 99 números 1, 2, 3, …, 98, 99. Queremos pintar 50 números de forma que a soma de dois números pintados nunca seja igual a 99 nem a 100. De quantas maneiras isto se pode fazer?

PROBLEMA 2

Seja N um inteiro positivo. Um divisor de N é *próprio* se é maior que 1 e menor que N. Por exemplo, 2, 3, 6 e 9 são todos os divisores próprios de 18.
Um inteiro positivo é *especial* se tem pelo menos dois divisores próprios e é múltiplo de todas as possíveis diferenças entre dois deles. Determina todos os inteiros positivos que são especiais.

PROBLEMA 3

Sejam $[ABC]$ um triângulo e D um ponto no seu interior tal que $D\hat{B}C = 60°$ e $D\hat{C}B = D\hat{A}B = 30°$.
Se M e N são os pontos médios de $[AC]$ e $[BC]$, respetivamente, demonstra que $D\widehat{M}N = 90°$.

PROBLEMA 4

Em cada vértice de um polígono de 13 lados escrevemos um dos números 1, 2, 3, …, 12, 13, sem repetições. De seguida, em cada lado do polígono escrevemos a diferença dos números dos vértices dos seus extremos (o maior menos o menor). Por exemplo, se dois vértices consecutivos do polígono têm os números 2 e 11, no lado que determinam escreve-se o número 9.
a) É possível numerar os vértices do polígono de modo que nos lados apenas se escrevam os números 3, 4 e 5?
b) É possível numerar os vértices do polígono de modo que nos lados apenas se escrevam os números 3, 4 e 6?

PROBLEMA 5

Demonstra que existem 100 inteiros positivos distintos $n_1, n_2, \ldots, n_{100}$ tais que $\dfrac{n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + \ldots + n_{100}^3}{100}$ é um cubo perfeito.