XXVI OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nível
Outubro de 2020

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar máquina de calcular; não podes consultar livros nem apontamentos.
Justifica cada uma das tuas respostas.
Ao participar comprometes-te a não divulgar os problemas até 7 de novembro.

PROBLEMA 1

Dizemos que um número inteiro positivo é *super-ímpar* se todos os seus algarismos são ímpares. Por exemplo, 1737 é super-ímpar e 3051 não é. Determina um inteiro positivo par que **não** se possa escrever como soma de dois números super-ímpares e explica porque não é possível escreve-lo dessa maneira.

PROBLEMA 2

a) Determina se existem inteiros positivos a, b e c, não necessariamente distintos, tais que
$$a + b + c = 2020 \text{ e } 2^a + 2^b + 2^c \text{ é um quadrado perfeito.}$$
b) Determina se existem inteiros positivos a, b e c, não necessariamente distintos, tais que
$$a + b + c = 2020 \text{ e } 3^a + 3^b + 3^c \text{ é um quadrado perfeito.}$$

PROBLEMA 3

Numa caixa há 2020 pedras. O jogo que a Ana e o Bruno jogam consiste em retirar pedras da caixa, alternadamente e a Ana é a primeira a jogar. Cada um, na sua jogada, deve retirar um número positivo de pedras que seja uma capicua. O que conseguir deixar a caixa vazia ganha. Determina qual dos dois tem uma estratégia que lhe permita ganhar e explica qual é essa estratégia.
Nota: Um inteiro positivo é uma capicua se é igual quando lido da direita para a esquerda e da esquerda para a direita. Por exemplo 3, 22, 484 e 2002 são capicuas.

PROBLEMA 4

Sejam $[ABC]$ um triângulo retângulo, com o ângulo reto em B e M o ponto médio do lado $[BC]$. Seja P o ponto na bissetriz do ângulo BAC tal que PM é perpendicular a BC (P está fora do triângulo $[ABC]$). Determina a área do triângulo $[ABC]$ se $\overline{PM} = 1$ e $\overline{MC} = 5$.

PROBLEMA 5

Dizemos que um inteiro positivo n é *circular* se é possível colocar os números 1, 2, …, n à volta de uma circunferência de tal modo que não haja três números adjacentes cuja soma seja múltipla de 3.

a) Demonstra que 9 não é circular.
b) Demonstra que qualquer inteiro maior que 9 é circular.