

XXV OLIMPIÁDA de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2019



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não podes usar máquina de calcular; não podes consultar livros nem apontamentos.

Justifica cada uma das tuas respostas.

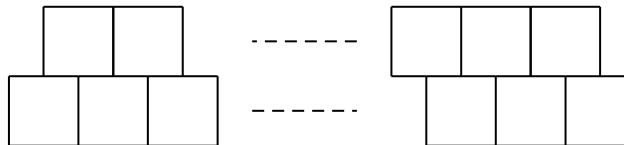
Ao participar comprometes-te a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Um inteiro positivo é *piola* se os 9 restos que se obtêm ao dividi-lo por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 são todos diferentes e distintos de zero. Quantos inteiros piola há entre 1 e 100000?

PROBLEMA 2

Considere-se um tabuleiro com 2020 quadrículas na linha inferior e 2019 na linha superior, dispostas como se mostra na figura.



Na linha inferior colocam-se os números inteiros de 1 a 2020 por alguma ordem. Depois em cada quadrícula da linha superior escreve-se o produto dos dois números que estão por baixo. Como se devem colocar os números na linha inferior para que a soma dos números da linha superior seja a menor possível?

PROBLEMA 3

Os pontos P , Q e R nos lados $[AB]$, $[BC]$ e $[CA]$, respetivamente, de um triângulo $[ABC]$, são tais que $BQ = 2QC$, $CR = 2RA$ e $PRQ = 90^\circ$. Prova que $APR = RPQ$.

PROBLEMA 4

Encontra o menor número inteiro positivo N de dois ou mais algarismos que tem a seguinte propriedade: se inserirmos qualquer algarismo não nulo d entre quaisquer dois algarismos adjacentes de N obtemos um número que é múltiplo de d .

PROBLEMA 5

Considerem-se os n vértices de um polígono regular de n lados. Um conjunto de triângulos com vértices nestes n pontos tem a seguinte propriedade: para cada triângulo do conjunto, pelo menos um dos seus lados não é lado de nenhum outro triângulo do conjunto. Qual é o maior número de triângulos que pode ter o conjunto?