

XXIV OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2018



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não podes usar máquina de calcular; não podes consultar livros nem apontamentos.

Justifica cada uma das tuas respostas.

Ao participar comprometes-te a não divulgar os problemas até 8 de junho.

PROBLEMA 1

A partir de um número inteiro de 4 algarismos construiu-se outro número somando 1 ao algarismo das unidades, subtraindo 1 ao algarismo das dezenas, somando 1 ao algarismo das centenas e subtraindo 1 ao algarismo das unidades de milhar. Se o número de que se partiu e o número que se obteve são quadrados perfeitos, qual é o número original? É único?

PROBLEMA 2

Num tabuleiro 4×4 estão dispostos, um em cada quadrícula, todos os números de 1 a 16. O André e o Paulo escolhem quatro números cada um. O André escolhe o maior de cada linha e o Paulo o maior de cada coluna. Ambos podem escolher um mesmo número. Em seguida, eliminam-se do tabuleiro todos os números escolhidos. Qual é o maior valor que pode ter a soma dos números que ficam no tabuleiro?

PROBLEMA 3

Uma povoação com 2018 habitantes está dividida em dois grupos: o grupo dos cavalheiros, que dizem sempre a verdade, e o dos mentirosos, que mentem sempre. Certo dia, todos os habitantes dispuseram-se à volta de uma circunferência e cada um deles anunciou “*Os meus dois vizinhos, o da esquerda e o da direita, são mentirosos*”. De seguida um dos habitantes abandonou a povoação. Os 2017 que ficaram dispuseram-se novamente à volta duma circunferência (não necessariamente pela mesma ordem) e cada um deles anunciou “*Nenhum dos meus vizinhos, o da esquerda e o da direita, é do meu grupo*”. Determinar, se for possível, de que grupo era o habitante que abandonou a povoação.

PROBLEMA 4

Num paralelogramo $[ABCD]$, sejam M o ponto do lado $[BC]$ tal que $\overline{MC} = 2\overline{BM}$ e N o ponto do lado $[CD]$ tal que $\overline{NC} = 2\overline{DN}$. Se a distância do ponto B à reta AM é 3, calcular a distância do ponto N à reta AM .

PROBLEMA 5

Cada ponto duma circunferência pode ser pintado com uma de 10 cores. Será verdade que para qualquer coloração há, na circunferência, 4 pontos da mesma cor que são vértices dum quadrilátero com dois lados paralelos (um trapézio isósceles ou um retângulo)?