XX OLIMPÍADAS de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2014

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar calculadora; não podes consultar livros nem apontamentos.
<u>Justifica cada uma das tuas respostas.</u>
Ao participar comprometes-te a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

O caminho que vai da aldeia ao refúgio da montanha tem 76 km. Um grupo de caminheiros percorreu-o em 10 dias. Em dois dias consecutivos, nunca caminharam mais de 16 km, mas em três dias consecutivos sempre caminharam pelo menos 23 km. Determinar o número máximo de quilómetros que podem ter percorrido num só dia.

PROBLEMA 2

Num quadrilátero convexo [*ABCD*], sejam *M*, *N*, *P* e *Q* os pontos médios dos lados [*AB*], [*BC*], [*CD*] e [*DA*], respetivamente. Se [*MP*] e [*NQ*] dividem [*ABCD*] em quatro quadriláteros com a mesma área, demonstrar que [*ABCD*] é um paralelogramo.

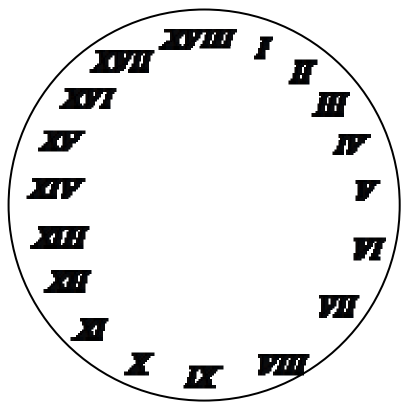
PROBLEMA 3

A Ana e o Lucas jogam o seguinte jogo. A Ana escreve uma lista de n números inteiros distintos. O Lucas ganha se puder escolher quatro números distintos, a, b, c e d, de modo que o número $a+b-(c+d)$ seja múltiplo de 20.

Determinar o valor mínimo de n para que, qualquer que seja a lista da Ana, o Lucas possa sempre ganhar.

PROBLEMA 4

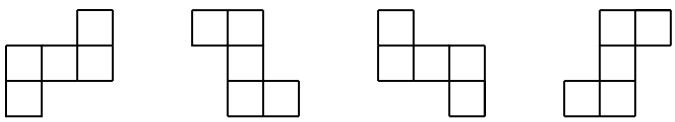
Numa escavação na Roma Antiga encontrou-se um relógio pouco habitual com 18 divisões marcadas com números romanos (ver figura).



Infelizmente o relógio estava partido em 5 pedaços. A soma dos números em cada pedaço era a mesma. Mostrar de que maneira pode estar o relógio partido.

PROBLEMA 5

Cada quadrícula de um tabuleiro $n\times n$, com $n\geq 3$, está pintada com uma de 8 cores. Para que valores de n se pode afirmar que alguma destas figuras,



incluída no tabuleiro, contém duas quadrículas da mesma cor?