

XV OLIMPIÁDA de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2009



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não podes usar calculadora; não podes consultar livros nem apontamentos.

Justifica cada uma das tuas respostas.

Ao participar comprometes-te a não divulgar os problemas até 25 de Maio.

PROBLEMA 1

Inicialmente no quadro está escrito o número 1. Em cada passo, apaga-se o número do quadro e escreve-se outro, que se obtém aplicando uma das seguintes operações:

- Operação A: Multiplicar o número do quadro por $\frac{1}{2}$.
- Operação B: Subtrair a 1 o número do quadro.

Por exemplo, se no quadro está o número $\frac{3}{8}$ pode-se substituí-lo por $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$ ou por $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

Determina uma sucessão de passos ao fim da qual o número do quadro seja $\frac{2009}{2^{2009}}$.

PROBLEMA 2

Seja [ABCD] um quadrilátero convexo tal que o triângulo [ABD] é equilátero e o triângulo [BCD] é isósceles, com $\hat{C} = 90^\circ$. Se E é o ponto médio do lado [AD], calcula $\angle CED$.

PROBLEMA 3

Na seguinte soma: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, se suprimirmos os dois primeiros sinais “+” obtemos a nova soma $123 + 4 + 5 + 6 = 138$. Suprimindo três sinais “+” podemos obter $1 + 23 + 456 = 480$.

Consideremos agora a soma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$, na qual se vão suprimir alguns sinais “+”. Quais são os três menores múltiplos de 100 que podemos obter desta forma?

PROBLEMA 4

Cada casa de um tabuleiro 5×5 foi pintada de vermelho ou de azul, de tal forma que se cumpre a seguinte condição: “Para quaisquer duas filas e duas colunas, das 4 casas que estão nas suas intersecções, há 4, 2 ou 0 pintadas de vermelho.” De quantas formas se pode pintar o tabuleiro?

PROBLEMA 5

Um solitário inicia-se com 25 cartas em linha. Algumas estão voltadas para cima, e outras estão voltadas para baixo.

Em cada movimento deve-se escolher uma carta que esteja voltada para cima, retirá-la, e dar a volta às cartas vizinhas da que se retirou (se as houver).

O solitário ganha-se quando se consegue, repetindo este movimento, retirar as 25 cartas da mesa.

Se inicialmente há n cartas voltadas para cima, encontra todos os valores de n para os quais se pode ganhar o solitário. Explica como se ganha, independentemente da distribuição inicial das cartas voltadas para cima, e justifica porque é impossível ganhar para os outros valores de n .

Duas cartas são vizinhas quando uma está imediatamente ao lado da outra, à direita ou à esquerda.

Por exemplo: a carta marcada com A tem duas cartas vizinhas e a marcada com B uma só. Depois de retirar uma carta fica um espaço, de modo que a marcada com C tem uma única carta vizinha, e a marcada com D não tem nenhuma.

