XIII OLIMPÍADA de MAIO

Segundo nível
Maio de 2007

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar máquina de calcular nem consultar livros e apontamentos.
Justifica cada uma das tuas respostas.
Não deves divulgar os problemas até dia 25 de Maio.

PROBLEMA 1

Determina o maior número natural que tem todos os seus algarismos distintos e é múltiplo de 5, de 8 e de 11.

PROBLEMA 2

Seja $n > 2$ um inteiro par. Nas casas de um tabuleiro $n \times n$ devem colocar-se fichas de modo que em cada coluna a quantidade de fichas seja par e diferente de zero e em cada fila o quantidade de fichas seja ímpar.

Determina a menor quantidade de fichas que se tem de colocar no tabuleiro para cumprir esta regra.

Mostra uma configuração com essa quantidade de fichas e explica porque é que com menos fichas não se pode cumprir a regra.

PROBLEMA 3

Oito crianças, todas de distintas estaturas, devem formar uma fila ordenada do menor ao maior. Dizemos que a fila tem exactamente um erro se há uma criança que está imediatamente atrás de um outro mais alto que ele, e todos os outros (à excepção do primeiro da fila) estão imediatamente detrás de um mais baixo. De quantas maneiras as oito crianças podem formar uma fila com exactamente um erro?

PROBLEMA 4

O Alex e o Bruno decidiram jogar o jogo dos primos. Em conjunto, escreveram um número natural de 6 algarismos distintos. Cada um, na sua vez, escreveu um algarismo à direita do último algarismo que o outro escreveu. Foi o Alex que começou com o primeiro algarismo da esquerda e o Bruno terminou com o último algarismo da direita (era proibido escrever um algarismo já utilizado).

O Bruno ganha se o número de 6 algarismos é primo. Caso contrário ganha o Alex.

Determina qual dos dois jogadores tem uma estratégia ganhadora e explica como se deve fazer para se ganhar independentemente de como o parceiro joga.

PROBLEMA 5

No triângulo $[ABC]$, $\hat{A} = 2\hat{C}$ e $2\hat{B} = \hat{A} + \hat{C}$. A bissectriz do ângulo em C intersecta $[AB]$ em E e F é o ponto médio de $[AE]$. A altura correspondente a $[BC]$ é $[AD]$. A mediatriz de $[DF]$ intersecta $[AC]$ em M.

Prova que $\overline{AM} = \overline{CM}$.