XXIII OLIMPÍADA de MAIO
Primeiro Nível
Maio de 2017

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar máquina de calcular; não podes consultar livros nem apontamentos.
Justifica cada uma das respostas.
Ao participar comprometes-te a não divulgar os problemas até 27 de maio.

PROBLEMA 1

A cada número de três algarismos, o Matias adicionou o número que se obtém invertendo os seus algarismos. Por exemplo, ao número 927 adicionou o 729. Determina em quantos casos o resultado da soma do Matias é um número com todos os algarismos ímpares.

PROBLEMA 2

É possível pintar 33 quadrículas de um tabuleiro 9×9 de forma que cada linha e cada coluna do tabuleiro tenha no máximo 4 quadrículas pintadas, e se pintarmos qualquer outra quadrícula apareça alguma linha ou coluna com 5 quadrículas pintadas? Justifica a tua resposta quer seja positiva ou negativa.

PROBLEMA 3

Seja $[ABCD]$ um losango de lados $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 13$. Sobre o lado $[AB]$ constrói-se o losango $[BAFE]$, exterior a $[ABCD]$ e tal que o lado $[AF]$ é paralelo à diagonal $[BD]$ de $[ABCD]$. Se a área de $[BAFE]$ é igual a 65, calcula a área de $[ABCD]$.

PROBLEMA 4

Seja n um inteiro par maior que 2. Sobre os vértices de um polígono regular de n lados podem colocar-se peças vermelhas ou azuis. Dois jogadores, A e B, jogam alternadamente do seguinte modo: cada jogador, na sua vez, escolhe dois vértices que não tenham peças e coloca num deles uma peça vermelha e no outro uma peça azul. O objetivo de A é conseguir que três vértices consecutivos tenham peças da mesma cor. O objetivo de B é impedir que isto aconteça. No início do jogo não há peças em nenhum dos vértices.
Demostra que independentemente de quem comece a jogar, o jogador B poderá sempre atingir o seu objetivo.

PROBLEMA 5

Dizemos que dois números inteiros positivos a e b formam um *par adequado* se $a+b$ divide ab (a sua soma divide o seu produto). Determina 24 números inteiros positivos que se podem distribuir em 12 pares adequados, de modo que cada número inteiro apareça apenas num par e o maior dos 24 números seja o menor possível.