

XXI OLIMPIADAS de MAIO
Primeiro Nível
Maio de 2015



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não podes usar calculadora; não podes consultar livros nem apontamentos.

Justifica cada uma das tuas respostas.

Ao participar comprometes-te a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

O professor pensou em segredo num número S de três algarismos. Os alunos A , B , C e D tentaram adivinhar o número, dizendo, respetivamente, 541, 837, 291 e 846. O professor disse-lhes, “Cada um de vós acertou exatamente num algarismo de S e na posição correta”. Qual é o número S ?

PROBLEMA 2

Dadas 6 moedas exatamente iguais, 4 são verdadeiras, todas com o mesmo peso, e 2 são falsas, uma é mais leve que as verdadeiras e a outra, mais pesada que as verdadeiras. As duas falsas pesam, em conjunto, o mesmo que duas moedas verdadeiras. Encontrar duas moedas verdadeiras utilizando duas vezes uma balança de dois pratos, sem pesos.

Nota: Uma balança de dois pratos só informa se o prato esquerdo pesa mais, menos ou o mesmo que o direito.

PROBLEMA 3

No quadrilátero $[ABCD]$, o ângulo em C é o triplo do ângulo em A . Considerem-se os pontos P , no lado $[AB]$, tal que $D\hat{P}A = 90^\circ$ e Q , no lado $[AD]$, tal que $B\hat{Q}A = 90^\circ$. Os segmentos $[DP]$ e $[BQ]$ intersectam-se em O de modo que $\overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO}$. Calcular a medida das amplitudes dos ângulos em A e C .

PROBLEMA 4

Um número diz-se *supersticioso* quando é igual a 13 vezes a soma dos seus algarismos. Encontrar todos os números supersticiosos.

PROBLEMA 5

Numa casa reúnem-se vinte e seis pessoas. A Alice é amiga de só uma pessoa, o Bruno é amigo de duas pessoas, o Carlos é amigo de três, o Daniel de quatro, o Elias de cinco, e assim sucessivamente cada pessoa é amiga de mais uma pessoa que a anterior, até chegar à Yvone, a pessoa número vinte e cinco, que é amiga de todos. De quantas pessoas é amiga a Zita, a pessoa número vinte e seis?

Nota: Se A é amigo de B então B é amigo de A .