# *XIII OLIMPÍADA de MAIO*

*Primeiro nível*

*Maio de 2007*

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar máquina de calcular nem consultar livros e apontamentos.
Justifica cada uma das tuas respostas.
Não deves divulgar os problemas até dia 25 de Maio.

## PROBLEMA 1

Num ano que tenha 53 sábados, que dia da semana é o 12 de Maio?
Indica todas as possibilidades.

## PROBLEMA 2

Sejam $X = a1b9$ e $Y = 51ab$ dois números inteiros positivos onde $a$ e $b$ são algarismos. Sabe-se que $X$ é múltiplo de um número positivo $n$ de dois algarismos e $Y$ é o múltiplo seguinte desse número $n$. Determina o número $n$ e os algarismos $a$ e $b$. Justifica porque não há outras possibilidades.

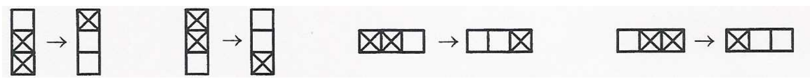
## PROBLEMA 3

O Jorge escolheu 6 números inteiros positivos distintos e escreveu cada um deles na face de um cubo. O Jorge lançou o cubo três vezes. No primeiro lançamento apareceu o número 5 em cima e além disso a soma dos números das faces laterais era 20. No segundo lançamento apareceu o número 7 em cima e além disso a soma dos números das faces laterais era 17. No terceiro lançamento apareceu o número 4 em cima e além disso todos os números das faces laterais eram números primos.

Quais foram os números escolhidos pelo Jorge e como é que ele os distribuiu pelas faces do cubo? Analisa todas as possibilidades. Recorda que 1 não é um número primo.

## PROBLEMA 4

Um tabuleiro $7 \times 7$ tem uma lâmpada em cada uma das suas 49 casas, que pode estar acesa ou apagada. A operação permitida é escolher 3 casas consecutivas de uma fila ou de uma coluna que tenham duas lâmpadas vizinhas acesas e a outra apagada e alterar o estado das três. Isto é:



Indica uma configuração com exactamente 3 lâmpadas acesas situadas nas quatro primeiras filas do tabuleiro tais que, mediante uma sucessão de operações permitidas, se chegue a ter uma única lâmpada acesa no tabuleiro e que esta esteja na última fila. Mostra a sequência de operações que se utilizam para atingir o objectivo.

## PROBLEMA 5

O pentágono de papel $[ABCDE]$ é tal que

$$\overline{AB} = \overline{BC} = 3 \text{ cm}, \quad \overline{CD} = \overline{DE} = 5 \text{ cm}, \quad \overline{EA} = 4 \text{ cm}, \quad A\hat{B}C = 100^o, \quad C\hat{D}E = 80^o.$$

Como se pode dividir o pentágono em quatro triângulos, traçando três segmentos de recta, de modo que com os quatro triângulos se forme um rectângulo, sem buracos nem sobreposições (os triângulos podem girar-se e/ou dar a volta).