

X OLIMPÍADA de MAIO

Primeiro nível

Maio de 2004

Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não podes usar máquina de calcular nem consultar livros e apontamentos.

Justifica cada uma das tuas respostas.

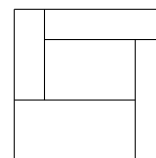
Não deves divulgar os problemas até dia 25 de Maio.

PROBLEMA 1

O Xavier multiplicou quatro algarismos, não necessariamente distintos, e obteve um número terminado em 7. Determina os possíveis valores da soma dos quatro algarismos utilizados pelo Xavier. Indica todas as possibilidades.

PROBLEMA 2

No interior de um quadrado 11×11 , o Paulo desenhou um rectângulo e prolongando os seus lados dividiu o quadrado em 5 rectângulos, como se indica na figura. A Sofia fez o mesmo, mas além disso conseguiu que os comprimentos dos lados dos 5 rectângulos fossem números inteiros entre 1 e 10, todos distintos. Desenha uma figura como a que a Sofia fez, indicando o comprimento dos lados dos 5 rectângulos.



PROBLEMA 3

Em cada quadrado de um tabuleiro 5×5 está escrito 1 ou -1. Em cada *passo* constrói-se um novo tabuleiro, substituindo o número de cada um dos 25 quadrados pelo resultado da multiplicação de todos os quadrados vizinhos. Inicialmente o tabuleiro é o da figura. Determina o tabuleiro obtido ao fim de 2004 *passos*.

1	1	-1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Nota: Dois quadrados são vizinhos se tiverem um lado comum.

PROBLEMA 4

No quadrado $[ABCD]$ de diagonais $[AC]$ e $[BD]$, chamamos O ao seu centro. Constrói-se um quadrado $[PQRS]$ de lados paralelos aos do quadrado $[ABCD]$ com P pertencente a $[AO]$, Q em $[BO]$, R em $[CO]$ e S em $[DO]$. Se a área do quadrado $[ABCD]$ é o dobro da área do quadrado $[PQRS]$ e M é o ponto médio do lado $[AB]$, calcula a amplitude de $\angle AMP$. (Não podes medir).

PROBLEMA 5

Há 90 cartões e em cada um estão escritos dois algarismos distintos: 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 12, e assim sucessivamente até 98.

Um conjunto de cartões é *correcto* se não contém nenhum cartão que tenha o primeiro algarismo igual ao segundo algarismo de outro cartão do conjunto.

Chamamos *valor* de um conjunto de cartões à soma dos números escritos em todos os cartões desse conjunto. Por exemplo, os quatro cartões 04, 35, 78 e 98 formam um conjunto *correcto* e o seu valor é 215, pois $04+35+78+98=215$.

Encontra um conjunto *correcto* que tenha o maior valor possível. Explica porque razão é impossível obter um conjunto *correcto* de valor maior ao que encontraste.