IX OLIMPÍADA de MAIO
Segundo nível
Maio de 2003

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar máquina de calcular nem consultar livros e apontamentos.
Justifica cada uma das tuas respostas.
Não deves divulgar os problemas até dia 25 de Maio.

PROBLEMA 1

Escolhem-se quatro algarismos a, b, c, d distintos entre si e diferentes de zero e escreve-se a lista de todos os números de quatro algarismos que se podem obter trocando a posição dos algarismos a, b, c, d. Que algarismos devemos escolher para que a lista contenha o maior número possível de números de quatro algarismos que sejam múltiplos de 36?

PROBLEMA 2

Seja $[ABCD]$ um rectângulo de lados $\overline{AB} = 4$ e $\overline{BC} = 3$. A recta perpendicular à diagonal $[BD]$ traçada por A intersecta $[BD]$ no ponto H. Sejam M o ponto médio de $[BH]$ e N o ponto médio de $[CD]$. Calcula o comprimento de $[MN]$.

PROBLEMA 3

Determina todos os pares de números inteiros (a, b) tais que $8b+1$ é múltiplo de a e $8a+1$ é múltiplo de b.

PROBLEMA 4

O Beto marcou 2003 pontos verdes no plano, de modo que todos os triângulos cujos três vértices são pontos verdes têm área inferior a 1.

Mostra que os 2003 pontos verdes estão contidos num triângulo T de área inferior a 4.

PROBLEMA 5

Uma formiga, que está numa aresta de um cubo de lado 8, tem de realizar um trajecto pela superfície do cubo e regressar ao ponto de partida. O seu caminho tem de conter pontos interiores das seis faces do cubo e a formiga deve visitar apenas uma vez cada uma das faces do cubo. Determina o comprimento do caminho mais curto que a formiga pode realizar e justifica porque é o caminho mais curto.