X OLIMPÍADA de MAIO (2004)
Primeiro nível
Soluções e critérios de pontuação

PROBLEMA 1

O Xavier multiplicou quatro algarismos, não necessariamente distintos, e obteve um número terminado em 7. Determina os possíveis valores da soma dos quatro algarismos utilizados pelo Xavier. Indica todas as possibilidades.

Solução

Se os algarismos são a, b, c e d e tem-se que $a \times b \times c \times d = (a \times b) \times (c \times d)$ termina em 7, então um dos números $(a \times b)$ ou $(c \times d)$ termina em 1 e o outro em 7, ou um termina em 3 e o outro em 9. Como não importa a ordem dos algarismos, tem-se dois casos: $a \times b$ termina em 1 e $c \times d$ em 7 ou $a \times b$ termina em 3 e $c \times d$ em 9.

Se $(a \times b)$ termina em 1, então os algarismos a e b podem ser 1 e 1, 3 e 7 ou 9 e 9.

Se $(c \times d)$ termina em 7, então os algarismos c e d podem ser 1 e 7 ou 3 e 9.

Neste caso, os quatro algarismos podem ser (1,1,1,7), (1,1,3,9), (3,7,1,7), (3,7,3,9), (9,9,1,7), (9,9,3,9).

Se $a \times b$ termina em 3, então os algarismos a e b podem ser 1 e 3 ou 7 e 9.

Se $c \times d$ termina em 9, então os algarismos c e d podem ser 1 e 9, 3 e 3 ou 7 e 7.

Neste caso, os quatro algarismos podem ser (1,3,1,9), (1,3,3,3), (1,3,7,7), (7,9,1,9), (7,9,3,3), (7,9,7,7).

Ordenando os algarismos do menor ao maior e eliminando as repetições restam oito possibilidades: (1,1,1,7), (1,1,3,9), (1,3,3,3), (1,3,7,7), (1,7,9,9), (3,3,7,9), (3,9,9,9), (7,7,7,9).

As somas possíveis são seis: 10, 14, 18, 26, 22 e 30.

Critérios de correcção:

Solução

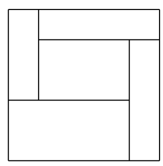
Faz alguma análise dos produtos que terminam em 7		1 ponto
Por cada uma das soluções atribui-se 1 ponto	até	8 pontos
Determina bem as somas		1 ponto
TOTAL		10 pontos

Apresenta a lista dos 8 conjuntos de 4 algarismos e as 6 somas	10 pontos

Apresenta só as 6 possíveis somas sem mencionar de que conjuntos provêm	1 ponto

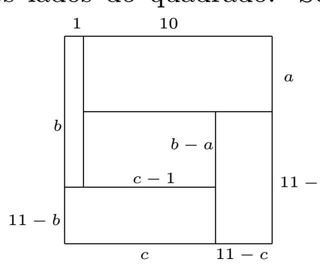
PROBLEMA 2

No interior de um quadrado 11×11, o Paulo desenhou um rectângulo e prolongando os seus lados dividiu o quadrado em 5 rectângulos, como se indica na figura. A Sofia fez o mesmo, mas além disso conseguiu que os comprimentos dos lados dos 5 rectângulos fossem números inteiros entre 1 e 10, todos distintos. Desenha uma figura como a que a Sofia fez, indicando o comprimento dos lados dos 5 rectângulos.



Solução

O rectângulo com lado 10 tem de se colocar junto a um dos lados do quadrado. Sem considerar as rotações pode colocar-se na parte superior direita.



Sejam a, b, c os segmentos da figura, então $2, 3, \ldots, 9$ são, por alguma ordem, $a, b, c, 11-a, 11-b, 11-c, c-1, b-a$. Os três lados verticais, $a, b-a$ e $11-b$ somam 11: $a + (b-a) + (11-b) = 11$. Sabe-se que são inteiros distintos, maiores que 2 e menores que 10, então só há duas possibilidades, serem em alguma ordem 2,3 e 6 ou 2, 4 e 5.

Se são 2,3 e 6 analisem-se as possibilidades para c: não pode ser 9, pois seria $11 - c = 2$, não pode ser 8, pois seria $11-c=3$, não pode ser 7, pois seria $c-1=6$, não pode ser 5, pois seria $11-c=6$ e não pode ser 4, pois seria $c-1=3$. Portanto, neste caso não há nenhuma possibilidade para c e os valores de $a, b-a$ e $11-b$ devem ser, por alguma ordem, 2, 4 e 5.

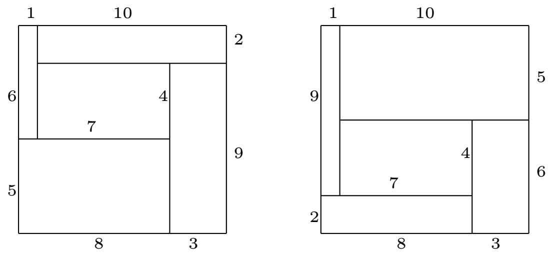
Vejam-se as possibilidades para c: não pode ser 9, 7 ou 6, pois ficaria $11-c$ igual a 2, 4 ou 5, respectivamente. Também não pode ser 3 porque ficaria $c-1$ igual a 2. Portanto, $c=8$, $11-c=3$ e $c-1=7$.

Então a não pode ser 4 pois $11-a$ seria 7. Além disso, b só pode ser 6 ou 9.

Se $b=6$, então $11-b=5$; logo $a=2$, $b-a=4$ e $11-a=9$.

Se $b=9$, então $11-b=2$; logo $a=5$, $b-a=4$ e $11-a=6$.

Há só duas maneiras de distribuir nos segmentos os números 1, 2, 3, ..., 10:



Critérios de correcção:

Apresenta uma das soluções correctas		10 pontos
Conclui que o lado 10 tem de ficar num dos lados do quadrado		1 ponto
Faz uma figura e estabelece alguma relação entre os lados do rectângulo central e os lados dos das bordas		2 pontos
Em algum dos lados do rectângulo elimina 3 ou 4 valores		1 ponto
TOTAL	até	4 pontos

PROBLEMA 3

Em cada quadrado de um tabuleiro 5×5 está escrito 1 ou -1. Em cada *passo* constrói-se um novo tabuleiro, substituindo o número de cada um dos 25 quadrados pelo resultado da multiplicação de todos os quadrados vizinhos. Inicialmente o tabuleiro é o da figura. Determina o tabuleiro obtido ao fim de 2004 *passos*.

1	1	-1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Nota: Dois quadrados são vizinhos se tiverem um lado comum.

Solução

Apresentam-se os primeiros 8 passos

	-1		-1	
		-1		

P_1

-1		-1		-1
		-1		

P_2

-1				-1
	-1		-1	
		-1		

P_3

-1				-1
		-1		
		-1		

P_4

	-1		-1	
-1		-1		-1
	-1		-1	
	-1		-1	

P_5

		-1		
		-1		
-1				-1

P_6

	-1		-1	
	-1		-1	
-1		-1		-1
	-1		-1	

P_7

-1				-1
		-1		
		-1		

P_8

Note-se que $P_4=P_8$, logo $P_{4t}=P_4$ para todo $t\geq 1$. Como 2004= 4.501, $P_{2004}=P_4$. A tabela ao fim de 2004 passos tem os -1 nos lugares indicados.

-1				-1
		-1		
		-1		

Critérios de correcção:

Solução

Entende o problema e faz alguns passos bem	1 ponto
Escreve correctamente as primeiras 8 tabelas	5 pontos
Descobre o ciclo correcto	2 pontos
Escreve a resposta correcta	2 pontos
TOTAL	10 pontos

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores

Entende o problema e faz alguns passos bem		1 ponto
Comete algum erro e encontra um ciclo (não será o correcto)		2 pontos
Com o ciclo incorrecto obtém o passo 2004 (não será o correcto)		2 pontos
TOTAL	até	5 pontos

PROBLEMA 4

No quadrado $[ABCD]$ de diagonais $[AC]$ e $[BD]$, chamamos O ao seu centro. Constrói-se um quadrado $[PQRS]$ de lados paralelos aos do quadrado $[ABCD]$ com P pertencente a $[AO]$, Q em $[BO]$, R em $[CO]$ e S em $[DO]$. Se a área do quadrado $[ABCD]$ é o dobro da área do quadrado $[PQRS]$ e M é o ponto médio do lado $[AB]$, calcula a amplitude de $\measuredangle AMP$. (Não podes medir).

Solução I

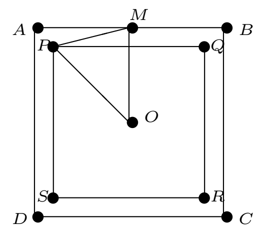
Seja $a = \overline{AB}$, então $a^2 = 2\overline{PQ}^2$.

O triângulo $[AMO]$ é isósceles e rectângulo, uma vez que $\overline{AM} = \overline{OM} = \frac{a}{2}$, logo $A\hat{O}M = 45^o$.

Além disso, $\overline{PR}^2 = 2\overline{PQ}^2 = a^2$. Então $\overline{OP} = \frac{a}{2}$ e o triângulo $[MOP]$ é isósceles.

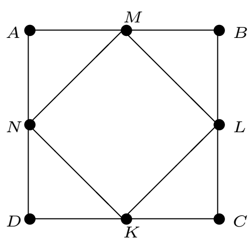
Portanto, $P\hat{M}O = M\hat{P}O = \frac{180^o - P\hat{O}M}{2} = \frac{180^o - 45^o}{2} = 90^o - \frac{45^o}{2}$.

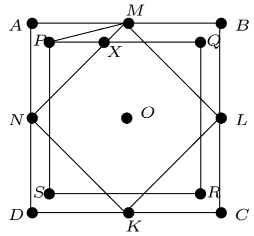
Finalmente, $A\hat{M}P = A\hat{M}O - P\hat{M}O = 90^o - \left(90^o - \frac{45^o}{2}\right) = \frac{45^o}{2}$.



Solução II

O quadrado determinado pelos pontos médios dos lados tem metade da área do quadrado, como se vê na figura seguinte.





Neste problema, se se roda o quadrado $[PQRS]$ com centro em O obtém-se o quadrado dos pontos médios $[KLMN]$. Se X é a intersecção de $[MN]$ e $[PQ]$, pela simetria da figura resulta que o triângulo $[PXM]$ é isósceles em X. Como $P\hat{X}M = 180^o - A\hat{M}N = 135^o$, tem-se que $P\hat{M}X = M\hat{P}X = \frac{180^o - 135^o}{2} = \frac{45^o}{2}$. Finalmente, $A\hat{M}P = 45^o - \frac{45^o}{2} = \frac{45^o}{2}$ (pois $A\hat{M}N = 45^o$).

Critérios de correcção:

Solução I

Desenha bem a figura a analisar	1 ponto
Observa que o triângulo $[AMO]$ é isósceles e rectângulo	1 ponto
Deduz que $A\hat{O}M = 45^o$	1 ponto
Da relação entre as áreas determina a relação entre os lados de ambos os quadrados	2 pontos
Obtém $\overline{PR} = \overline{AB}$ (usando que área$(PQRS) = \overline{PR}^2/2$ ou Pitágoras)	2 pontos
Descobre que o triângulo $[MOP]$ é isósceles	1 ponto
Calcula os ângulos da base do triângulo $[MOP]$	1 ponto
Escreve a solução $A\hat{M}P = 90^o - P\hat{M}O$	1 ponto
TOTAL	10 pontos

Solução II

Desenha bem a figura a analisar	1 ponto
Observa que o quadrado dos pontos médios tem a mesma área que $[PQRS]$	2 pontos
Roda $[PQRS]$ com centro em O e obtém $[KLMN]$	2 pontos
Observa que o triângulo $[PXM]$ é isósceles	2 pontos
Obtém $P\hat{X}M = 135^o$ ou $M\hat{X}Q = 45^o$	1 ponto
Obtém $P\hat{M}X = 45^o/2$	1 ponto
Obtém $A\hat{M}P = 45^o/2$	1 ponto
TOTAL	10 pontos

PROBLEMA 5

Há 90 cartões e em cada um estão escritos dois algarismos distintos: 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 12, e assim sucessivamente até 98.

Um conjunto de cartões é *correcto* se não contém nenhum cartão que tenha o primeiro algarismos igual ao segundo algarismo de outro cartão do conjunto.

Chamamos *valor* de um conjunto de cartões à soma dos números escritos em todos os cartões desse conjunto. Por exemplo, os quatro cartões 04, 35, 78 e 98 formam um conjunto correcto e o seu valor é 215, pois 04+35+78+98=215.

Encontra um conjunto correcto que tenha o maior valor possível. Explica porque razão é impossível obter um conjunto correcto de valor maior ao que encontraste.

Solução

Primeiro observa-se que num conjunto correcto sendo A o conjunto dos primeiros algarismos e B o dos segundos algarismos, se em A há a algarismos e em B há b algarismos, então $A \cup B = \emptyset$ e o conjunto tem no máximo $a \cdot b$ cartões.

Como $a+b \leq 10$, o valor máximo de $a \cdot b$ é $a \cdot b = 25$, quando $a = b = 5$. Se o conjunto tem 25 cartões, $a_1b_1, a_1b_2, \ldots, a_1b_5, \ldots, a_5b_1, \ldots, a_5b_5$, a soma é $S = (a_1 + \cdots + a_5) \cdot 10 \cdot 5 + (b_1 + \cdots + b_5) \cdot 5$ com $b_1 + \cdots + b_5 = 45 - (a_1 + \cdots + a_5)$. O máximo de S é $50(a_1 + \cdots + a_5) + 5 \cdot 45 - 5(a_1 + \cdots + a_5) = 225 + 45(a_1 + \cdots + a_5)$ que é atingido para $a_1 + \cdots + a_5 = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$ e é $S = 225 + 45 \cdot 35 = 1800$.

Se $a \cdot b = 24$ e o conjunto tem 24 cartões, podem ser os primeiros algarismos $a_1, \ldots, a_6$ e os segundos $b_1, \ldots, b_4$ ou os primeiros $a_1, \ldots, a_4$ e os segundos $b_1, \ldots, b_6$. No primeiro caso, $S = (a_1 + \cdots + a_6) \cdot 10 \cdot 4 + (b_1 + \cdots + b_4) \cdot 6 = 49(a_1 + \cdots + a_6) + 6 \cdot 45 - 6(a_1 + \cdots + a_6) = 34(a_1 + \cdots + a_6) + 270$. Neste caso, o máximo alcança-se para $a_1 + \cdots + a_6 = 9+8+7+6+5+4 = 39$, e é $S = 34 \cdot 39 + 270 = 1596$. No segundo caso, $S = (a_1 + \cdots + a_4) \cdot 10 \cdot 6 + (45 - (a_1 + \cdots + a_4)) \cdot 4 = 60(a_1 + \cdots + a_4) + 180 - 4(a_1 + \cdots + a_4) \leq 56(9+8+7+6) + 180 = 56 \cdot 30 + 180 = 1860$.

Com menos cartões a soma é menor. De facto, $S = (a_1 + \cdots + a_k) \cdot 10 \cdot (10-k) + k \cdot (45 - (a_1 + \cdots + a_k)) = (a_1 + \cdots + a_k) \cdot (100 - 10k - k) + 45k$.

Se $k = 3$, é menor que $24 \cdot 67 + 135 = 1743$; se $k = 7$, é menor que $23 \cdot 42 + 315 = 1281$.

Se há menos cartões (um número menor ou igual que 16), a soma é menor que $16 \cdot 100 = 1600$.

O conjunto correcto de maior valor é $\{90, 91, \ldots, 95, 80, 81, \ldots, 85, 70, \ldots, 75, 60, \ldots, 65\}$ com 24 cartões, o seu valor é 1860.

Critérios de correcção:

Solução

Observa que o conjunto correcto de valor máximo deve ser $a + b = 10$ (usa os 10 algarismos)	2 pontos
Observa que o o conjunto correcto de valor máximo deve ter $a \cdot b$ cartões (se um algarismo figura como dezena nalgum cartão, então figura nas b unidades possíveis)	2 pontos
Observa que se a e b estão "próximos" (5 e 5 ou 4 e 6) há mais cartões no conjunto	2 pontos
Observa que os algarismos maiores se devem usar nas dezenas	2 pontos
Calcula as somas	1 ponto
Indica o máximo	1 ponto
TOTAL	10 pontos