XXIV Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária 2021

20 de novembro de 2021

1. (3 pontos) Seja $V = \mathbb{R}^{2021}$ e A uma matriz quadrada de ordem 2021 com entradas reais. Para cada vetor $v \in V$ define-se a órbita de v como o conjunto $O(v) = \{A^m v : m \in \mathbb{Z}, m \geq 0\}$. Diz-se que a órbita de v é periódica se existe um inteiro $k > 0$ tal que $A^k v = v$. Prove que se para um vetor w a sua órbita $O(w)$ é periódica e contém 2021 vetores linearmente independentes, então $O(v)$ é periódica para todo $v \in V$.

2. (4 pontos) Existe um polinómio $P(x)$ não constante com coeficientes reais, tal que para todo o inteiro positivo n o número $P(n)$ seja algum termo da sucessão de Fibonacci?

   Nota: A sucessão de Fibonacci $\{F_1, F_2, \ldots\}$ define-se como $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 1$.

3. (4 pontos) Para todo o inteiro positivo $n > 1$, considere a sua fatorização em primos $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, com $\alpha_i > 0$, e defina-se o produto $p(n) := (p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_k - 1)$. Diz-se que o número n é *significativo* se $p(n)$ e $p(n+1)$ são divisíveis por 42; por exemplo, 2021 é significativo porque $p(2021) = p(43 \cdot 47) = 42 \cdot 46$ e $p(2022) = p(2 \cdot 3 \cdot 337) = 1 \cdot 2 \cdot 336 = 42 \cdot 16$. Encontre todos os números *significativos* menores que 500.

4. (4 pontos) Sejam $a, b > 0$, considerem-se as elipses

$$\mathcal{E}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\} \text{ e } \mathcal{E}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4\right\}.$$

   Dado um ponto A de $\mathcal{E}_2$, sejam B e C pontos distintos de $\mathcal{E}_2$ tais que AB e AC são tangentes a $\mathcal{E}_1$. Mostre que BC também é tangente a $\mathcal{E}_1$ e que a área do triângulo ABC não depende da escolha do ponto A.

5. (5 pontos) Considere a função $\epsilon : \mathbb{Z}^+ \to \{-1, 1\}$, para a qual existe $0 < \alpha < 1$ tal que $|\epsilon(1) + \ldots + \epsilon(n)| \leq n^\alpha$ para todo o $n \in \mathbb{Z}^+$. Mostre que se $\beta > \alpha$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon(n)/n^\beta$ converge e é limitada superiormente por $\beta/(\beta - \alpha)$.

6. (7 pontos) Seja $k \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a família $F_n(k)$ das matrizes $n \times n$ com entradas complexas A, tal que

   a) Cada entrada de A é 0 ou 1.

   b) Há no máximo k filas de A tal que o número de entradas diferentes de zero é maior que k.

   Para uma matriz A com entradas complexas seja $f(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ é valor próprio de } A\}$ e seja $\varphi(n) := \max\{f(A) : A \in F_n(k)\}$. Prove que $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}}$ existe e determine o seu valor.

   Nota: Diz-se que λ é um valor próprio de A, se existe um vetor $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$.

7. (7 pontos) Seja n um inteiro positivo e sejam $w_1, \ldots, w_n$ as n-ésimas raízes da unidade. Designe-se por C_n o valor máximo de $|a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n|$, onde $a_i \in \{-1, 1\}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Determine o valor de
$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{n}.$$

   Nota: As n-ésimas raízes da unidade, são os n números complexos que satisfazem a equação $z^n = 1$.