XXII Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária 2019

09 de novembro de 2019

1. (3 pontos). Uma formiga caminha sobre a superfície de um octaedro regular. Em cada minuto, a formiga move-se com a mesma probabilidade para uma das faces adjacentes à face em que se encontra. Se a formiga começa na face F qual é a probabilidade de ela estar novamente na mesma face F após n minutos?

2. (4 pontos). Demonstre que o conjunto

$$\{\sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n/n^2 : \varepsilon_n \in \{0,1\}\}$$

é um intervalo.

3. (4 pontos). Sejam r, s números reais positivos tais que $2 < \frac{r}{s}$. Demonstre que a desigualdade

$$\frac{a^r - b^r}{a^s - b^s} + \frac{b^r - c^r}{b^s - c^s} + \frac{c^r - a^r}{c^s - a^s} \leq \frac{r}{s}(a^{r-s} + b^{r-s} + c^{r-s}),$$

é válida para quaisquer números reais positivos distintos a, b, c.

4. (5 pontos). Sejam $n > m > 0$ números inteiros primos relativos. Prove que o polinómio

$$Q(x) = mx^n - nx^m + n - m$$

tem exatamente $m - 1$ raízes dentro do círculo unitário.

5. (6 pontos). Seja $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ uma função tal que $\sigma(1) = 1$, $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ para quaisquer m, n inteiros positivos e, se $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < ...$ são os primos por ordem crescente, então $\sigma(p_k) = p_{k+1}$, para todo $k \geq 1$. Determine o supremo do conjunto $Y = \{\alpha > 0 : \text{existem infinitos } n \geq 1 \text{ tais que } \sigma(n) \geq n^\alpha\}$.

6. (7 pontos). Seja C uma circunferência de raio 1. Se A_1, A_2, A_3 são três pontos no interior do disco cuja fronteira é C, definimos as transformações $T_i : C \to C$ para $i = 1, 2, 3$, como $T_i(P)$ é o ponto onde a reta PA_i interseta o círculo C novamente. Demonstre que a transformação $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$ tem exatamente 0, 1 ou 2 pontos fixos.

7. (7 pontos). Dados um inteiro positivo n e uma sucessão $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de inteiros positivos. Definimos $K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ recursivamente por:

- Para $n = 0$: $K() = 1$.
- Para $n = 1$: $K(a_1) = a_1$.
- Para $n \geq 2$: $K(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_n \cdot K(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + K(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$.

Assim, por exemplo, $K(a_1, a_2) = a_2 \cdot K(a_1) + K() = a_2 \cdot a_1 + 1$.

Dizemos que um número inteiro positivo m é *sólido* se existem um inteiro positivo n e uma sucessão $a_1, a_2, \ldots, a_n$ com um dos seus termos igual a 2 e os outros $n-1$ iguais a 1 tais que $m = K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Por exemplo, $K(1, 2, 1) = 1 \cdot K(2, 1) + K(1) = 2 \cdot 1 + 1 + 1 = 4$ é sólido. Seja S o conjunto dos números inteiros positivos sólidos.

(i) Prove que existem inteiros positivos m arbitrariamente grandes tais que $S \cap [m, 4m/3] = \emptyset$.

(ii) Prove que existem inteiros positivos m arbitrariamente grandes tais que $|S \cap [m, 4m/3]| \geq \log m$.

Obs.: Em (ii), log designa o logaritmo natural.