XX Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária 2017

14 de outubro de 2017

1. (3 pontos). Seja $n \geq 1$ e sejam $k_0, \ldots, k_{n+1}$ inteiros positivos. Demonstre que existem inteiros $m_1, \ldots, m_n$ tais que

$$mdc(k_0,\ \ldots,\ k_{n+1}) = mdc(k_0 + m_1 k_1 + \ldots + m_n k_n,\ k_{n+1}).$$

Nota: *mdc* designa o máximo divisor comum.

2. (3 pontos). Seja $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2017\}$. Um jardineiro planta relva em S da seguinte forma: em cada dia o jardineiro pode plantar relva apenas num elemento de S, além disso, se o número i está coberto de relva, no dia seguinte esta relva espalhou-se e cobriu os números $i-1$, i, e $i+1$ (sempre que os índices correspondentes estejam em S). Determine o menor número de dias que o jardineiro necessita para conseguir cobrir todo o S de relva.

3. (4 pontos). Sejam P, Q, R pontos colineares no plano, com Q entre P e R, diferente de P, de R e do ponto médio de $[PR]$. Seja $\mathcal{H}$ o ramo da hipérbole, com focos P e R, que passa por Q. Determine o lugar geométrico dos incentros dos triângulos $[HPR]$ quando o ponto H varia em $\mathcal{H} - \{Q\}$.
Nota: O incentro de um triângulo é o centro da sua circunferência inscrita.

4. (5 pontos). Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem $f(x)f(y) = f(x+y)$ e $f(x) \geq 1 + x$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

5. (6 pontos). Seja $\{x_n\}$ uma sucessão de números reais limitada. Para $\{x_{n_k}\}$ e $\{x_{m_k}\}$ duas subsucessões, definimos a relação de equivalência $\{x_{n_k}\} \sim \{x_{m_k}\}$, se $\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - x_{m_k}) = 0$. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto das classes de equivalências. Prove que $|\mathcal{C}| = 1$ ou $\mathcal{C}$ é não enumerável.

6. (7 pontos). Seja K um corpo finito, $K \neq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, e considere os conjuntos $A = \{a^2 : a \in K\}$, $B = \{b^4 : b \in K\}$. Demonstre que qualquer elemento de K se pode escrever como soma de um elemento de A e outro de B.

7. (7 pontos). Sejam $a < b < c < d$ números reais tais que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-a| \cdot |x-b| \cdot |x-c| \cdot |x-d|}}.$$

Demonstre que

$$\int_a^b f = \int_c^d f.$$