XIX Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária 2016

05 de novembro de 2016

Problema 1. (3 pontos). Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua e estritamente crescente. Demonstre que as duas condições seguintes são equivalentes:

(i) Se $f(x) \in \mathbb{Z}$, então $x \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\lfloor f(x) \rfloor = f(\lfloor x \rfloor)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Problema 2. (4 pontos). Sejam $a_1 < a_2 < ... < a_n$ inteiros positivos ímpares. Demonstre que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_1, a_2, a_3]} + \cdots + \frac{1}{[a_1, a_2, ..., a_n]} < \frac{3}{2}$$

sendo $[a_1, a_2, ..., a_i]$ o mínimo múltiplo comum dos números $a_1, a_2, ..., a_i$.

Problema 3. (4 pontos). Os números reais positivos a, b e c verificam a condição $ab + ac + bc \leq 3abc$. Demonstre que

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c.$$

Problema 4. (5 pontos). Seja G um grupo em que todo o elemento $x \in G$, com $x \neq 1$, tem ordem p. Mostre que, se em qualquer subconjunto A de G com $p^2 - 1$ elementos há p elementos que comutam dois a dois, então G é um grupo Abeliano.

Problema 5. (5 pontos). Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem:

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y), \text{ para todos os números reais } x, y.$$

Problema 6. (7 pontos). Para um inteiro positivo n, um arranjo n-bicolorido consiste em 3 triângulos vermelhos e n triângulos azuis que satisfazem as seguintes condições:

- Não existe uma reta que passe pelos três triângulos vermelhos.
- Cada triângulo vermelho e cada triângulo azul intersectam-se.

Determine o menor valor de k para o qual para qualquer arranjo n-bicolorido podem-se encontrar k pontos do plano que intersectem todos os triângulos azuis do arranjo.

Problema 7. (7 pontos). (a) Seja K um inteiro positivo e seja $f(x)$ um polinómio real diferente de zero que não tem raízes complexas no domínio definido pela condição angular $|arg z| < \frac{\pi}{2K}$. Demonstre que existe um polinómio real diferente de zero $g(x)$ tal que os coeficientes de $g(x)$ sejam todos não negativos, que $f(x)$ divida $g(x)$ e $grau\ g \leq K \cdot grau\ f$.

(b) Construa para todo o inteiro positivo K um polinómio real diferente de zero $f(x)$ que não tenha raízes complexas no domínio definido pela condição angular $|arg z| < \frac{\pi}{2K}$ e que satisfaça a propriedade que todo o polinómio diferente de zero $g(x)$ que é divisível por $f(x)$, que tenha somente coeficientes não negativos, e também cumpra que $grau\ g \geq K \cdot grau\ f$.