XIV Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária 2011

12 de Novembro de 2011

1. (4 pontos) Sejam r e s inteiros positivos. Cada um dos números a_1, a_2, ..., a_r, b_1, ..., b_s é 1 ou 2. Considere os números que têm as seguintes representações decimais:

$$\begin{aligned} a &= 0.a_1a_2\dots a_ra_1a_2\dots a_r\dots \\ b &= 0.b_1b_2\dots b_sb_1b_2\dots b_s\dots \\ x &= 0.a_1a_2\dots a_rb_1b_2\dots b_s \\ y &= 0.b_1b_2\dots b_sa_1a_2\dots a_r \end{aligned}$$

   Mostre que $a \leq b$ se e só se $x \leq y$.

   Nota: Os números a e b têm representação decimal periódica. Os números x e y têm representação decimal finita.

2. (4 pontos) O cubo C $n-$dimensional decompõe-se em 2^n caixas rectangulares mais pequenas através de n planos P_1, P_2, ..., P_n tal que cada eixo de C é perpendicular a exactamente um desses planos. As 2^n caixas são pintadas de branco e preto de tal forma que cada par de caixas vizinhas tem uma cor diferente.

   Suponhamos que a soma dos volumes das caixas pretas é igual à soma dos volumes das caixas brancas. Mostre que pelo menos um dos planos P_1, P_2, ..., P_n bissecta C.

3. (5 pontos) Sejam $n \geq 2$ um inteiro e $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ um polinómio com n raízes inteiras distintas entre si e diferentes de 1. Mostre que:

$$\frac{n + \sum_{j=0}^{n-1} ja_j}{1 + \sum_{j=0}^{n-1} a_j} < 1 + \ln n.$$

4. (5 pontos) Os números complexos a, b e c satisfazem $a|bc| + b|ca| + c|ab| = 0$. Mostre que

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|.$$

5. (6 pontos) Considere três círculos ω_1, ω_2, ω_3 na esfera unitária S de $\mathbb{R}^3$. Suponhamos que para cada par de índices (i,j) com $1 \leq i < j \leq 3$ existem dois círculos máximos C_{ij} e C_{ji}

de S tal que ambos são tangentes a w_i e w_j e nenhum dos dois separa w_i e w_j. Os círculos máximos C_{ij} e C_{ji} intersectam-se nos pontos P_{ij} e P_{ji}.

Demonstre que os pontos P_{12}, P_{23}, P_{31}, P_{13}, P_{32} e P_{21} estão num mesmo círculo máximo de S.

6. (7 pontos) Os inteiros não negativos a, b, c e d satisfazem $2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 = d^2$.

   Considere o conjunto X dos inteiros que se podem escrever como uma soma de quadrados de dois inteiros.

   Mostre que a, b e c pertencem a X se e só se o máximo divisor comum de a, b e c pertence a X.

7. (8 pontos) Considere

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in C([0,1]) : \forall x \in [0,1], \left| \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} \right| \leq 1 \right\}.$$

   Determine

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \int_0^1 f \right|.$$