XIII Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária

06 de Novembro de 2010

Problema 1 (4 pontos) Seja $f : S \to \mathbb{R}$ a função do conjunto de todos os triângulos rectângulos no conjunto dos números reais, definida por $f(\triangle[ABC]) = \frac{h}{r}$, onde h é a altura relativamente à hipotenusa e r é o raio da circunferência inscrita. Determinar a imagem, $Im(f)$, da função.

Problema 2 (5 pontos) Calcule a soma da série

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{sen^3\, 3^k}{3^k}$$

Problema 3 (6 pontos) Um estudante soma as fracções racionais de forma incorrecta

$$(*) \qquad \frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{a+x}{b+y},$$

contudo, às vezes, obtém resultados correctos. Para uma dada fracção $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$, determinar todas as fracções $\frac{x}{y}, x, y \in \mathbb{Z}, y > 0$, tal que o resultado obtido por $(*)$ é correcto.

Problema 4 (6 pontos) Seja $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinómio mónico de grau $n > 2$, com coeficientes reais, com todas as suas raízes reais e diferentes de zero. Demonstrar que para todo $k = 0, 1, 2, ..., n-2$, pelo menos um dos coeficientes a_k, a_{k+1} é diferente de zero.

Problema 5 (6 pontos) Sejam A, B matrizes que comutam de dimensão 2010×2010 com elementos reais, tais que $A^{2010} = B^{2010} = I$, onde I é a matriz identidade. Demonstrar que se $tr(AB) = 2010$, então $tr(A) = tr(B)$.

Problema 6 (7 pontos) Demonstrar que, para cada número inteiro $a > 1$, os divisores primos do número $5a^4 - 5a^2 + 1$ são da forma $20k \pm 1, k \in \mathbb{Z}$.

Problema 7 (7 pontos)

a) (3 pontos) Demonstrar que, para quaisquer números inteiros positivos $m \le l$ dados, existem um número inteiro positivo n e números inteiros positivos $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ tais que a igualdade

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^i = \sum_{k=1}^{n} y_k^i$$

se verifica para cada $i = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots, l$, mas não se verifica para $i = m$.

b) (4 pontos) Demonstrar que existe uma solução do problema, onde todos os números $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ são distintos.