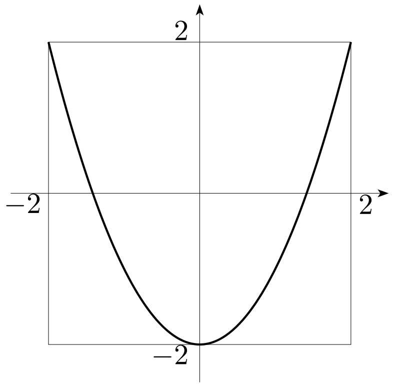
*UM PROBLEMA DE FUNÇÕES*

$P_1(x) = x^2 - 2$, $P_2(x) = P_1(P_1(x)) = (x^2-2)^2 - 2$, etc.

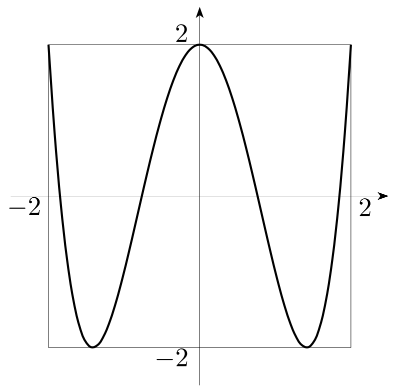
Mostraremos que o gráfico de $P_n(x)$ pode ser dividido em $2^n$ partes, cada uma ligando o lado de cima ao lado de baixo do quadrado de vértices $(2,2)$, $(-2,2)$, $(-2,-2)$, $(2,-2)$.

Observe que $P_n(-2) = P_n(2) = 2$ e para cada raiz $r$ de $P_i(x)$, $P_{i+1}(r) = -2$. Ainda, se $P_i(x) = -2$, então $P_{i+1}(x) = 2$. O gráfico de $P_1$ está dividido em duas partes: a primeira para $x \in [-2,0]$ e a segunda para $x \in [0,2]$, e em cada intervalo há uma raiz. A propriedade é válida para $n = 1$. Suponha então que é válida para $n$ qualquer. Então $P_1$ transforma cada uma das $2^n$ partes de $P_n$ em duas linhas de $P_{n+1}$, e a propriedade é válida para $n+1$.

$P_1(x)$




$P_2(x)$




A diagonal $(u = x)$ desse quadrado corta o gráfico de $P_n$ em $2^n$ pontos diferentes cujas abcissas são as raízes de $P_n(x)$. Como $P_n$ tem grau $2^n$, as raízes de $P_n(x)$ são todas reais e distintas.