OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXVIII OPM - 1ª Eliminatória - 8.1.2020 - Categoria Júnior - 6°/7° anos

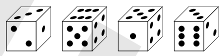
Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) Opção D. ($\text{Área } [ABEF] = 48\ cm^2$ *e* $\text{área } [BCD] = 12\ cm^2$)

   (b) Opção D. (*O João registou* $9\times9 = 81$ *números com* 3 *algarismos e* 10 *números com* 4 *algarismos.*)

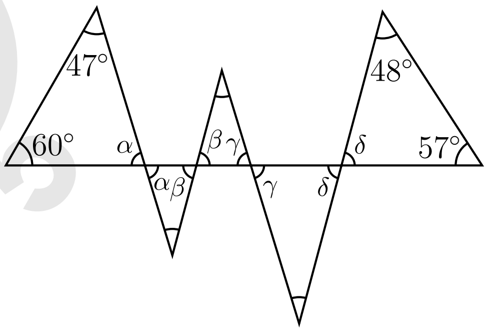
   (c) Opção A. (*Há* 4 *escolhas com* 1 *tipo,* $4 \times 3 = 12$ *escolhas com* 2 *tipos e* 4 *escolhas com* 3 *tipos.*)

   (d) Opção D. (*O dado da figura pode ser representado das seguintes formas:* )

2. A soma dos três números da primeira linha tem que ser igual à soma dos três números da coluna da direita, ou seja, $6 + \frac{4}{3}$ tem que ser igual à soma de $\frac{16}{3}$ com o número que fica no canto inferior direito. Logo, esse número tem que ser 2. Somando os três números da diagonal já completa (6, 4 e 2), ficamos a saber que a soma dos números de cada linha, de cada coluna, e de cada diagonal é 12, o que permite preencher o resto da tabela da seguinte forma: os números em falta na primeira e segunda linhas são, respetivamente, $\frac{14}{3}$ e $\frac{8}{3}$ e os números em falta nas primeira e segunda colunas são, respetivamente, são $\frac{10}{3}$ e $\frac{20}{3}$. Ao lado está indicada a tabela completa.

6	$\frac{4}{3}$	$\frac{14}{3}$
$\frac{8}{3}$	4	$\frac{16}{3}$
$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	2

3. Sejam α, β, γ e δ as amplitudes dos quatro ângulos indicados nos três triângulos de cima na figura. Como a amplitude de ângulos verticalmente opostos é igual, os ângulos indicados nos dois triângulos de baixo têm as mesmas amplitudes α, β, γ e δ.
Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, pode-se concluir que $\alpha = 180° - 60° - 47° = 73°$ e $\delta = 180° - 57° - 48° = 75°$.
Uma vez que os três triângulos do meio têm um ângulo com a mesma amplitude, pode-se concluir que $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta$, donde $\alpha = \gamma = 73°$ e $\beta = \delta = 75°$. Logo a amplitude do ângulo que se pretende calcular é $180° - 73° - 75° = 32°$.



4. Sejam a o número de músicas do Ricardo e b o número de músicas da Sara. Ao fim de 120 minutos, as duas playlists repetem-se pela primeira vez em simultâneo, logo $120 = mmc(a, b)$. Se a soma $a + b$ for mínima então a e b não têm fatores em comum, isto é, são números primos entre si. Como $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, há quatro casos possíveis:

   Caso 1: $a = 2^3 \times 3 \times 5$ e $b = 1$ (ou vice versa). Neste caso $a + b = 121$.

   Caso 2: $a = 2^3 \times 3$ e $b = 5$ (ou vice versa). Neste caso $a + b = 29$.

   Caso 3: $a = 2^3 \times 5$ e $b = 3$ (ou vice versa). Neste caso $a + b = 43$.

   Caso 4: $a = 2^3$ e $b = 3 \times 5$ (ou vice versa). Neste caso $a + b = 23$.

   Portanto, o número mínimo de músicas que o Ricardo e a Sara podem estar a ouvir é $a + b = 23$.