www.olimpiadas.spm.pt

XXXVII OPM - Final - 2º Dia - 06.04.2019 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

*Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.*
*Não é permitido o uso de calculadoras.*

4. Num tabuleiro com $3$ colunas e $4$ linhas, cada um dos $12$ quadrados vai ser pintado de verde ou de branco. Na primeira e na última linha, o número de quadrados pintados de verde tem de ser igual. Além disso, na primeira e na última coluna, o número de quadrados pintados de verde também tem de ser igual. De quantas maneiras diferentes é possível pintar o tabuleiro?

5. Seja $[ABC]$ um triângulo acutângulo e $\Gamma$ a sua circunferência circunscrita. Seja $D$ o ponto da reta $AB$ tal que $A$ é o ponto médio do segmento $[DB]$ e $P$ o ponto de interseção de $CD$ com $\Gamma$. Os pontos $W$ e $L$ estão nos arcos menores $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{AB}$, respetivamente, e são tais que $\overset{\frown}{BW}=\overset{\frown}{LA}=\overset{\frown}{AP}$. As retas $LC$ e $AW$ intersetam-se em $Q$. Mostra que $\overline{LQ}=\overline{BQ}$.

6. Uma rede de metro com $n \geq 2$ estações, onde cada estação está ligada a cada uma das restantes por uma linha de sentido único, diz-se $dispersa$ se existirem duas estações $A$ e $B$ tais que não é possível ir de $A$ a $B$ através da rede.

   Se uma rede é dispersa, mas for possível escolher uma estação $A$ e inverter o sentido de todas as linhas de e para $A$ de modo a que a nova rede já não seja dispersa, diz-se que a rede é *corrigível*.

   Indica todos os inteiros $n$ para os quais existe uma rede com $n$ estações, dispersa e não corrigível.