OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXVII OPM - 2ª Eliminatória - 09.01.2019 - Categoria B - 10º/12º anos

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Comecemos por notar que o número $111111 = 1001 \times 111$ é divisível por 1001.
Além disso, como $2019 = 336 \times 6 + 3$,

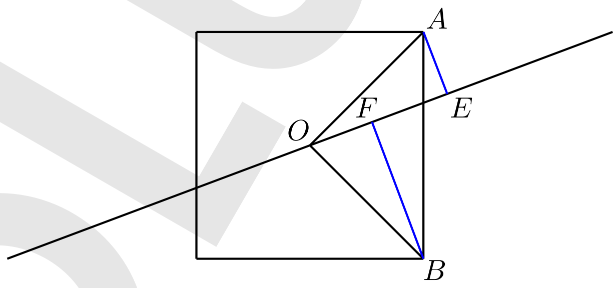
$$\begin{aligned}\underbrace{111\cdots 11}_{2019 \text{ vezes}} &= 111111 \times 10^{2013} + 111111 \times 10^{2007} + \cdots + 111111 \times 10^{9} + 111111 \times 10^{3} + 111 \\ &= 1001 \times \left(111 \times 10^{2013} + 111 \times 10^{2007} + \cdots + 111 \times 10^{9} + 111 \times 10^{3}\right) + 111 \\ &= 1001 \times \left(\underbrace{111000111\cdots 111000}_{2016 \text{ algarismos}}\right) + 111\,,\end{aligned}$$

concluímos que o resto da divisão de $\underbrace{111\cdots 11}_{2019 \text{ vezes}}$ por 1001 é 111.

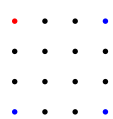
2. Na figura O é o centro do quadrado. O triângulo $[AOB]$ é isósceles (pois $\overline{OA} = \overline{OB}$) e retângulo em O. Assim, $A\hat{O}E = 90 - B\hat{O}F = F\hat{B}O$ e os triângulos $[AEO]$ e $[BFO]$, sendo retos em E e F, respetivamente, são semelhantes. Como $\overline{OA} = \overline{OB}$, eles são congruentes e $\overline{OE} = \overline{FB}$.
Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $[AOB]$, temos que

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow 2\overline{OA}^2 = 1 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = \frac{1}{2}\,.$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[OAE]$ temos que $\overline{OA}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{OE}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \overline{AE}^2 + \overline{FB}^2$.
Como um dos comprimentos $\overline{AE}$ ou $\overline{FB}$ é $\frac{1}{4}$, o outro é $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.



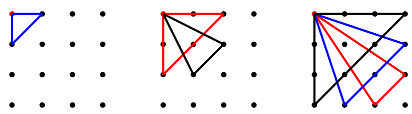
3. Vamos contar, para cada ponto da figura, o conjunto de triângulos isósceles que têm esse ponto como vértice comum a dois lados iguais. Tendo em conta as simetrias da figura, esta contagem pode ser dividida em três casos, de acordo com a posição do vértice. Esse vértice poderá estar:
Caso 1: num "canto" do quadrado. Por exemplo, o ponto assinalado a vermelho ou os pontos assinalados a azul na figura.



A tabela seguinte indica as distâncias dos restantes pontos da figura ao vértice do canto assinalado. Cada triângulo isósceles fica definido pela escolha de dois pontos à mesma distância do vértice e não colineares com este.

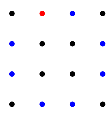
●	1	2	3
1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$
2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$
3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{18}$

Organizando as escolhas pelo comprimento dos lados iguais, há um triângulo com lados de comprimento igual a cada um dos seguintes valores : 1 (primeira figura); 2 e $\sqrt{5}$ (segunda figura); 3, $\sqrt{10}$ e $\sqrt{13}$ (terceira figura).



Como há quatro cantos para este vértice, há $6 \times 4 = 24$ triângulos isósceles.

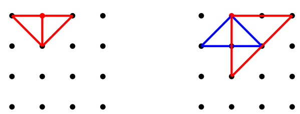
Caso 2: entre dois cantos do quadrado. Por exemplo, o ponto assinalado a vermelho ou os pontos assinalados a azul na figura.



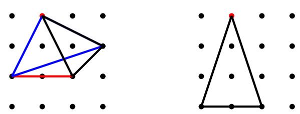
A tabela seguinte indica as distâncias dos restantes pontos da figura ao vértice assinalado a vermelho.

1	●	1	2
$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$
$\sqrt{10}$	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$

Organizando as escolhas pelo comprimento dos lados iguais, há dois triângulos com lados de comprimento igual a 1 (primeira figura), um triângulo com dois lados iguais a $\sqrt{2}$ e outro com dois lados iguais a 2 (segunda figura).

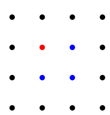


Depois há três triângulos com dois lados de comprimento igual a $\sqrt{5}$ (primeira figura) e um triângulo com dois lados iguais a $\sqrt{10}$ (segunda figura).



Portanto, como há oito vértices vermelhos possíveis e para cada um há oito triângulos isósceles, há, neste caso, $8 \times 8 = 64$ triângulos.

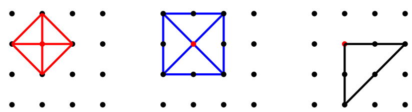
Caso 3: no "meio" do quadrado. Por exemplo, o ponto assinalado a vermelho ou os pontos assinalados a azul na figura.



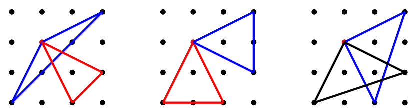
A tabela seguinte indica as distâncias dos restantes pontos da figura ao vértice assinalado a vermelho.

$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
1	●	1	2
$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$

Organizando as escolhas pelo comprimento dos lados iguais, há quatro triângulos com lados de comprimento igual a 1 (primeira figura), quatro triângulos com dois lados iguais a $\sqrt{2}$ (segunda figura) e um triângulo com dois lados iguais a 2 (terceira figura).



Depois há seis triângulos com dois lados de comprimento igual a $\sqrt{5}$.



Para cada um dos vértices do centro do quadrado há 15 triângulos isósceles, logo há $4 \times 15 = 60$ triângulos isósceles neste caso.

Pelas figuras e pela análise dos comprimentos dos lados dos triângulos, observa-se que não há triângulos equiláteros nesta lista e, por isso, não há repetições na contagem.

Portanto, há no total $24 + 64 + 60 = 148$ triângulos isósceles.

4. Sem perda de generalidade, vamos supor que $a \geq b$. Dividindo ambos os membros da expressão $a!b! = a! + b! + c!$ por $b!$ obtemos
$$a! = \frac{a!}{b!} + 1 + \frac{c!}{b!},$$
pelo que necessariamente $c \geq b$. É claro que se $a = b = c$, obtemos $a! = 3$, mas este número não conduz a uma solução. Portanto, pelo menos um dos números a, c deve ser estritamente superior a b.

Se ambos os números a e c forem estritamente superiores a b, então $b+1$ divide $a!$, $\frac{a!}{b!}$ e $\frac{c!}{b!}$. Como $b+1$ não divide 1, não podemos ter simultaneamente $a > b$ e $c > b$.

Se $a > b$ e $b = c$, obtemos, por um lado, que $a! = \frac{a!}{c!} + 2$, e portanto $c \geq 2$, e, por outro, que $c+1$ divide $a!$ e $\frac{a!}{c!}$. Como $c+1$ não divide 2, não podemos ter simultaneamente $a > b$ e $b = c$. Concluímos assim que temos de ter $a = b$ e $c > b$, donde se segue que
$$a! = 2 + \frac{c!}{a!},$$
e portanto $a \geq 3$. Notemos que se $c \geq a + 3$, então 3 divide $\frac{c!}{a!}$. Como 3 também divide $a!$ mas não divide 2, conclui-se que $a = b < c < a + 3$. Se $c = a + 1$, então $a! = 2 + (a+1) = a + 3$ e o termo $a + 3$ é divisível por a apenas se $a = 3$. Neste caso obtemos a solução $a = b = 3$ e $c = 4$ da igualdade $a!b! = a! + b! + c!$.

Por outro lado, se $c = a + 2$, então $a! = 2 + (a+1)(a+2) = a^2 + 3a + 4$. Como $a!$ é divisível por a, o segundo membro desta igualdade também é divisível por a, o que implica que a divide 4. Como $a \geq 3$, temos que $a = 4$ e este número não conduz a uma solução.

Concluímos que a única solução do problema é o triplo $(3, 3, 4)$.