OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

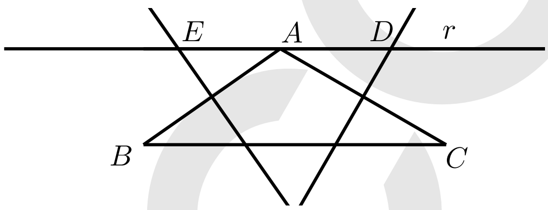
XXXVII OPM - 2ª Eliminatória - 09.01.2019 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção B. (*No fim de se reencher duas vezes, o sumo tem* $495ml$ *de concentrado e* $505ml$ *de água.*)
   (b) Opção C. (*Os triângulos* $[ABG]$ *e* $[DHG]$ *são semelhantes.*)
   (c) Opção C. (5 *livros finos ocupam menos de* $1/3$ *da prateleira e* 6 *livros grossos menos de* $2/3$.)
   (d) Opção C. (*A contagem termina no final do primeiro algarismo do número* 900.)

2. Como D pertence à mediatriz de $[AC]$, D é equidistante de A e C, ou seja $\overline{AD} = \overline{DC}$. O triângulo $[ADC]$ é isóceles e os ângulos em A e em C são iguais. Uma vez que r é paralela a BC, os ângulos DAC e ACB são iguais (porque são ângulos alternos internos). Portanto $D\hat{A}C = D\hat{C}A = A\hat{C}B = 30^\circ$, logo $B\hat{C}D = 60^\circ$ e $A\hat{D}C = 120^\circ$. Com argumentos análogos pode-se verificar que $E\hat{A}B = E\hat{B}A = 35^\circ$ e portanto $E\hat{B}C = 70^\circ$ e $B\hat{E}D = 110^\circ$.



3. Comecemos por notar que o número $111111 = 1001 \times 111$ é divisível por 1001.
   Além disso, como $2019 = 336 \times 6 + 3$,

$$\begin{aligned}\underbrace{111\cdots11}_{2019\ \text{vezes}} &= 111111 \times 10^{2013} + 111111 \times 10^{2007} + \cdots + 111111 \times 10^{9} + 111111 \times 10^{3} + 111 \\ &= 1001 \times \left(111 \times 10^{2013} + 111 \times 10^{2007} + \cdots + 111 \times 10^{9} + 111 \times 10^{3}\right) + 111 \\ &= 1001 \times \left(\underbrace{111000111\cdots111000}_{2016\ \text{algarismos}}\right) + 111\,,\end{aligned}$$

   concluímos que o resto da divisão de $\underbrace{111\cdots11}_{2019\ \text{vezes}}$ por 1001 é 111.

4. **Solução 1**

   A lista da Anabela, sendo constituída por números que começam com o algarismo 1, tem $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ números. Os números da lista do Belmiro que não aparecem na lista da Anabela, são da forma $21***$, e há $3 \times 2 \times 1 = 6$ números desses. Os números da lista da Catarina, que não aparecem nem na lista da Anabela nem na lista do Belmiro, são da forma $312**$, $321**$ ou $231**$. Estes são, no total, $3 \times (2 \times 1) = 6$ números.

   Na lista do Daniel, os números que não aparecem em nenhuma das listas anteriores podem-se dividir em três tipos: os da forma $4***5$, da forma $*4**5$ ou da forma $**4*5$. Todos os da forma $4***5$ estão na lista do Daniel e não estão nas restantes. São $3 \times 2 \times 1 = 6$ no total. Dos números da forma $*4**5$, apenas aqueles que começam com 1 têm de ser eliminados pois estão na lista da Anabela. São, por isso, $2 \times 2 \times 1 = 4$ números. Por fim, apenas temos 3 números da forma $**4*5$: 23415, 31425 e 32415, que não estão nas listas anteriores.

O conjunto de números que aparece em pelo menos uma das listas tem, assim, $24+6+6+13 = 49$ elementos. Como no total temos $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ números de cinco algarismos distintos formados pelos algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5, os números que não aparecem em nenhuma das listas são $120 - 49 = 71$.

Solução 2

Agrupemos os números que não estão em nenhuma das listas de acordo com a posição do algarismo 5.

Nenhum número da forma $5 * * * *$ está em alguma das listas. Temos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ destes números. Os números da forma $* 5 * * *$ que não estão em nenhuma das listas são aqueles que não começam por 1. Temos, assim, $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ destes números.

Quanto aos números da forma $* * 5 * *$ consideramos dois casos:

- se o algarismo 1 estiver à esquerda do algarismo 5, então o número é da forma $*15**$ pois, caso contrário, estaria na lista da Anabela. Como o algarimo 2 não pode ocupar a primeira posição (pois, nesse caso, estaria na lista do Belmiro), temos no total $2 \times 2 \times 1 = 4$ números desta forma que não aparecem em nenhuma das listas.
- se o algarismo 1 estiver à direita do algarismo 5, ele tem duas posições possíveis. Em qualquer dos casos, nenhum dos números desta forma estará em qualquer das listas. Temos, portanto, $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ destes números.

Relativamente aos números da forma $* * * 5 *$ consideramos os três casos seguintes:

- O número é da forma $4 * * 5 *$. Neste caso, nenhum destes números está em qualquer das listas. Temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ desses números.
- O número é da forma $*4*5*$. Se algum destes números pertencer a alguma das listas é à lista da Anabela. Teremos, então, $2 \times 2 \times 1 = 4$ números desta forma que não pertencem a nenhuma das listas.
- O número é da forma $* * 45*$. Temos apenas 3 números desta forma: 23451, 31452 e 32451, que não pertencem a nenhuma das listas.

Podemos então concluir que os números de cinco algarismos distintos, formados pelos algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5, que não aparecem em nenhuma das listas são $24 + 18 + 4 + 12 + 6 + 4 + 3 = 71$.