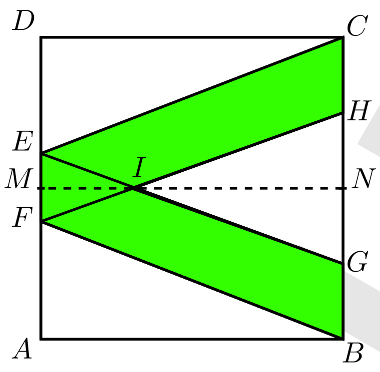
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção E. (*A votação das listas foi:* 90, 70, 30 *e* 10.)
   (b) Opção C. (*A classificação final foi:* C, D, B, A.)
   (c) Opção B. (*São precisas* 21 *filas, e o número de bolas pretas é* $1+2+\cdots+11$.)
   (d) Opção E. (*Cada triângulo formado por um dos lados do polígono e pelo seu centro tem área* 2.)

2. Sejam M e N os pontos médios dos lados $[AD]$ e $[BC]$, respetivamente. O ponto I pertence a $[MN]$. A área pedida será igual ao dobro da área do polígono $[MIGBF]$. Os triângulos $[NIG]$ e $[ABF]$ são semelhantes uma vez que têm lados paralelos. Assim,
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{NI}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{NG}}$$
e como $\overline{AB} = 16$cm, $\overline{AF} = 6$cm e $\overline{NG} = 4$cm, tem-se $\overline{NI} = \frac{32}{3}$cm. A área do polígono $[MIGBF]$, área$_{[MIGBF]}$, será
$$\begin{aligned}\text{área}_{[MIGBF]} &= \text{área}_{[ABNM]} - \text{área}_{[NIG]} - \text{área}_{[ABF]}\\ &= \frac{16\times 16}{2} - \frac{4\times\frac{32}{3}}{2} - \frac{16\times 6}{2}\\ &= \frac{176}{3}\end{aligned}$$
Portanto a área da figura sombreada é $2\times\frac{176}{3} = \frac{352}{3}$cm^2.



3. Cada maneira de pintar dividirá a rua em blocos de casas consecutivas pintadas da mesma cor, cada qual com pelo menos duas casas. Vamos dividir a contagem em casos, dependendo do número de blocos monocromáticos formados.

   Temos no máximo quatro blocos monocromáticos, sendo que nesse caso o tamanho dos blocos tem de ser 3,2,2,2 por alguma ordem, ou seja, há quatro formas de o fazer: $(3,2,2,2)$, $(2,3,2,2)$, $(2,2,3,2)$ e $(2,2,2,3)$. A distribuição de cores por blocos segue apenas a regra de não pintar blocos consecutivos da mesma cor. Temos portanto 4 possibilidades para o primeiro bloco, e 3 para cada um dos restantes, num total de 108 possibilidades. O número total de maneiras válidas de pintar com quatro blocos é $4\times 108 = 432$.

   Para três blocos temos $(5,2,2)$, com três ordenações possíveis, $(4,3,2)$, com seis ordenações possíveis e $(3,3,3)$ com uma única ordenação, para um total de dez possibilidades. As formas de os pintar são agora $4\times 3\times 3 = 36$, dando um total de $10\times 36 = 360$ possibilidades.

Finalmente, para dois blocos temos $(7,2)$, ou $(6,3)$, ou $(5,4)$, cada um com duas odenações possíveis, para seis possibilidades totais. Cada um tem 12 maneiras de ser pintado logo temos 72 formas válidas.

Há ainda a possibilidade de todas as casas serem pintadas da mesma cor. Adicionando todas as possibilidades temos $432+360+72+4=868$ maneiras diferentes de pintar as casas da rua.

4. Se $n = p_1^{a_1}\cdots p_\ell^{a_\ell}$, com $a_i \geq 1$ para $i = 1,\ldots,\ell$, é a decomposição de n em fatores primos, então a decomposição de n^n em fatores primos é dada por $n^n = p_1^{na_1}\cdots p_\ell^{na_\ell}$. Portanto, n^n possui $(na_1+1)\cdots(na_\ell+1)$ divisores positivos. Como $a_i \geq 1$ para $i = 1,\ldots,\ell$, segue-se que n^n possui pelo menos $(n+1)^\ell$ divisores positivos. Assim, se $n \geq 99$ e $\ell \geq 3$, concluí-se que n^n possui pelo menos 100^3 divisores positivos.

   Vejamos se existe algum inteiro positivo $n < 99$ com pelo menos 100^3 divisores positivos. Tal número $n = p_1^{a_1}\cdots p_\ell^{a_\ell}$ tem de satisfazer $a_i \leq 6$ para $i = 1,\ldots,\ell$, uma vez que $p_i^7 \geq 2^7 > 100$ para qualquer número primo p_i. Além disso, devemos ter $\ell \leq 3$ pois o produto de quaisquer quatro primos distintos é superior a 100.

   Se $\ell = 1$, ou seja se $n = p_1^{a_1}$ então o número de divisores positivos de n^n é inferior a $6n+1 < 601 < 100^3$.

   Se $\ell = 2$, ou seja, se $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}$ então o número de divisores positivos de n^n é inferior a $(6n+1)^2 < 601^2 < 100^3$.

   Consideremos então o caso $\ell = 3$, *i.e.* $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}$. Não podemos ter $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, pois neste caso o número de divisores positivos de n^n é $(n+1)^3 \leq 99^3 < 100^3$. Vejamos o caso em que $a_1 = 2$ e $a_2 = a_3 = 1$. Os menores inteiros positivos nestas condições são $60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$ e $84 = 2^2\cdot 3\cdot 7$. O número de divisores positivos de $60^{60} = 2^{120}\cdot 3^{60}\cdot 5^{60}$ é igual a $121\cdot 61\cdot 61 < 100^3$, mas o número número de divisores positivos de $84^{84} = 2^{168}\cdot 3^{84}\cdot 7^{84}$ é igual a $169\cdot 85\cdot 85 > 100^3$. Portanto, 84 é o menor inteiro positivo n tal que n^n possui pelo menos um milhão de divisores positivos.