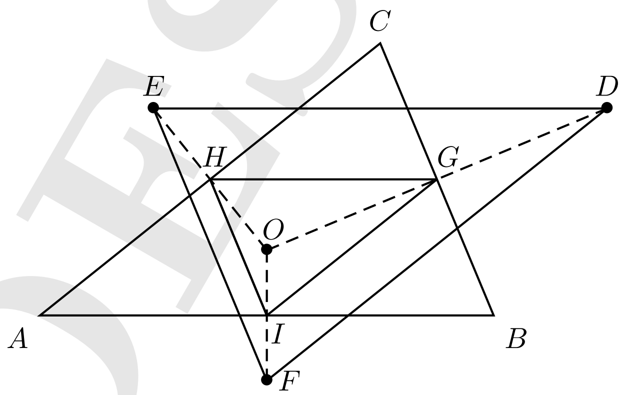
Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Sejam O o ponto de interseção das mediatrizes e G, H e I os pontos de interseção das mediatrizes com os lados $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$, respetivamente.
O triângulo $[AIH]$ é semelhante a $[ABC]$ pelo critério LAL, uma vez que têm o ângulo em A comum e $\frac{\overline{AI}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$, já que I e H são pontos médios dos lados. De modo análogo se pode justificar a semelhança dos triângulos $[HGC]$ e $[IBG]$ com o triângulo $[ABC]$.
Destas três semelhanças vem que $\frac{\overline{HI}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{IG}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$, logo, pelo critério LLL, o triângulo $[GHI]$ é semelhante ao triângulo $[ABC]$ com razão de semelhança $\frac{1}{2}$.



Logo, os triângulos $[AIH]$, $[IBG]$, $[HGC]$ e $[GHI]$ são congruentes, uma vez que são todos semelhantes ao triângulo $[ABC]$ com razão de semelhança $\frac{1}{2}$.

Tendo agora em atenção os triângulos $[HIG]$ e $[EDF]$, uma vez que $\overline{OI} = \overline{IF}$, $\overline{GD} = \overline{OG}$ e $\overline{OH} = \overline{HE}$, há três pares de triângulos semelhantes pelo critério LAL: $[OHI]$ e $[OEF]$, $[OIG]$ e $[OFD]$, $[OHG]$ e $[OED]$, todos com o respetivo ângulo em O comum, e com razão de semelhança igual a $\frac{1}{2}$. Finalmente tem-se $\overline{ED} = 2\overline{HG} = \overline{AB}$, $\overline{EF} = 2\overline{HI} = \overline{CB}$ e $\overline{FD} = 2\overline{IG} = \overline{AC}$, portanto os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são congruentes pelo critério LLL.

5. Comecemos por observar que, se todos os guardas são indispensáveis, então em qualquer momento do dia há no máximo dois guardas a vigiar a peça. De facto, suponhamos que num determinado momento estão três guardas a vigiar a peça. Destes, seja A o guarda que começou primeiro o seu turno, B o guarda que terminou por último o seu turno e C o guarda restante. Então C está sempre acompanhado de A ou B, logo não é indispensável.

Assim, o número total de horas de vigia durante um dia é no máximo $24 \times 2 = 48$ horas. Como cada guarda trabalha 7 horas por dia e $7 \times 7 = 49 > 48$, há no máximo 6 guardas a vigiar a peça.

Por outro lado, como $7 \times 3 = 21 < 24$ e a peça tem vigilância constante, há pelo menos 4 guardas a vigiar a peça.

Falta verificar que é possível vigiar a peça com 4, 5 e 6 guardas:

- É possível vigiar a peça com 4 guardas cujos turnos sejam $[0, 7]$, $[6, 13]$, $[12, 20]$ e $[17, 24]$.
- É possível vigiar a peça com 5 guardas cujos turnos sejam $[0, 7]$, $[3, 10]$, $[9, 16]$, $[15, 22]$ e $[17, 24]$.
- É possível vigiar a peça com 6 guardas cujos turnos sejam $[0, 7]$, $[1, 8]$, $[8, 15]$, $[9, 16]$, $[16, 23]$ e $[17, 24]$.

SOLUÇÕES

6. Subdividam-se os vértices em três tipos da seguinte forma

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \text{A} & & & \\
 & & \text{B} & & \text{C} & & \\
 & \text{C} & & \text{A} & & \text{B} & \\
\text{A} & & \text{B} & & \text{C} & & \text{A}
\end{array}
$$

Cada adição ou subtração afetará um vértice de cada tipo, pelo que as somas dos quatro números correspondentes a A's, dos três correspondentes a B's e dos três correspondentes a C's terão de ser iguais. Queremos então dez números consecutivos $(k, k+1, ..., k+9)$ tais que quatro deles somados são iguais a metade dos restantes seis somados, ou seja,

$$4k + i_0 + i_1 + i_2 + i_3 = 3k + (i_4 + i_5 + i_6 + i_7 + i_8 + i_9)/2$$

com $\{i_0, ..., i_9\} = \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Escrevendo $I = i_0 + i_1 + i_2 + i_3$, temos $k = \dfrac{45 - I}{2} - I = 3 \times \dfrac{15 - I}{2}$.
Para k ser mínimo, queremos I tão grande quanto possível. A escolha $I = 9 + 8 + 7 + 6 = 30$ não funciona pois k não seria um inteiro. Escolhendo $I = 9 + 8 + 7 + 5 = 29$, obtém-se $k = -21$. Para k ser máximo, queremos I tão pequeno quanto possível. A escolha $I = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$ não funciona pois k não seria um inteiro. Escolhendo $I = 0 + 1 + 2 + 4 = 7$, obtém-se $k = 12$. Portanto, k é um múltiplo de 3 entre -21 e 12.

- Para $k = 12$ há uma partição que funciona: $16 + 14 + 13 + 12 = 21 + 19 + 15 = 20 + 18 + 17 = 55$
- Para $k = 9$ há três partições que funcionam, uma das quais é: $15 + 11 + 10 + 9 = 18 + 14 + 13 = 17 + 16 + 12 = 45$
- Para $k = 6$ há seis partições que funcionam, uma das quais é: $14 + 8 + 7 + 6 = 15 + 11 + 9 = 13 + 12 + 10 = 35$
- Para $k = 3$ há nove partições que funcionam, uma das quais é: $12 + 6 + 4 + 3 = 11 + 9 + 5 = 10 + 8 + 7 = 25$
- Para $k = 0$ há doze partições que funcionam, uma das quais é: $9+5+1+0 = 8+4+3 = 7+6+2 = 15$
- Para $k = -3$ há catorze partições que funcionam, uma das quais é: $6+4+(-2)+(-3) = 5+1+(-1) = 3+2+0 = 5$
- Para os restantes valores de k, basta verificar que substituindo, nas partições anteriores, cada número pelo seu simétrico, obtêm-se partições de $-5, -15, -25, -35, -45$ e -55.

Para mostrar que podemos obter esta distribuição nos triângulos, basta ver que podemos obter qualquer configuração que verifique a propriedade de ter a mesma soma nos três tipos de vértices. Notemos que sempre que temos uma configuração em losango

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{X} & \\
\text{Y} & & \text{Z} \\
 & \text{W} &
\end{array}
$$

podemos subtrair uma unidade de X e adicioná-la a W sem alterar mais vértices, subtraindo 1 ao triângulo de vértices X, Y, Z e adicionando 1 ao triângulo de vértices Y, Z, W. Deste modo, podemos "transferir" unidades dentro do mesmo conjunto. Como os vértices de cada um dos subconjuntos da partição estão todos ligados por losangos, podemos transferir à vontade unidades dentro do mesmo subconjunto, pelo que podemos obter a configuração pretendida a partir de qualquer uma que tenha soma de cada classe igual a $4k + I$ (por exemplo o mesmo triângulo adicionado $4k + I$ vezes).

spm

SOLUÇÕES