Sugestões para a resolução dos problemas

4. Podemos reescrever a equação inicial, para a e b inteiros não nulos, na forma $10(a+b)=ab$, ou

$$(a-10)(b-10)=100.$$

Dado que os divisores de 100 são os elementos do conjunto

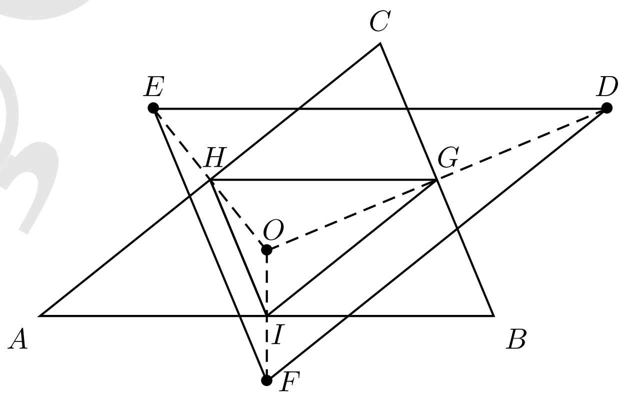
$$\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm5,\pm10,\pm20,\pm25,\pm50,\pm100\}$$

os pares (a,b) podem assumir os seguintes valores

$$(-90,9),(-40,8),(-15,6),(-10,5),(11,110),(12,60),(14,35),(15,30),(20,20),$$

$$(9,-90),(8,-40),(6,-15),(5,-10),(110,11),(60,12),(35,14),(30,15).$$

5. Sejam O o ponto de interseção das mediatrizes e G,H e I os pontos de interseção das mediatrizes com os lados $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$, respetivamente.
O triângulo $[AIH]$ é semelhante a $[ABC]$ pelo critério LAL, uma vez que têm o ângulo em A comum e $\frac{\overline{AI}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}$, já que I e H são pontos médios dos lados. De modo análogo se pode justificar a semelhança dos triângulos $[HGC]$ e $[IBG]$ com o triângulo $[ABC]$.
Destas três semelhanças vem que $\frac{\overline{HI}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{IG}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{HG}}{\overline{AB}}=\frac{1}{2}$, logo, pelo critério LLL, o triângulo $[GHI]$ é semelhante ao triângulo $[ABC]$ com razão de semelhança $\frac{1}{2}$.



Logo, os triângulos $[AIH]$, $[IBG]$, $[HGC]$ e $[GHI]$ são congruentes, uma vez que são todos semelhantes ao triângulo $[ABC]$ com razão de semelhança $\frac{1}{2}$.
Tendo agora em atenção os triângulos $[HIG]$ e $[EDF]$, uma vez que $\overline{OI}=\overline{IF}$, $\overline{GD}=\overline{OG}$ e $\overline{OH}=\overline{HE}$, há três pares de triângulos semelhantes pelo critério LAL: $[OHI]$ e $[OEF]$, $[OIG]$ e $[OFD]$, $[OHG]$ e $[OED]$, todos com o respetivo ângulo em O comum, e com razão de semelhança igual a $\frac{1}{2}$. Finalmente tem-se $\overline{ED}=2\overline{HG}=\overline{AB}$, $\overline{EF}=2\overline{HI}=\overline{CB}$ e $\overline{FD}=2\overline{IG}=\overline{AC}$, portanto os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são congruentes pelo critério LLL.

6. O menor valor possível de n é 7.

   Em primeiro lugar, mostremos que é possível pintar cada um dos 2018 quadros do museu com 7 cores distintas. Consideremos 8 cores $c_1, \ldots, c_8$. O primeiro quadro do museu pode ser pintado com as cores $c_2, \ldots, c_8$, o segundo quadro com as cores $c_1, c_3, \ldots, c_8$, etc..., o sétimo quadro com as cores $c_1, \ldots, c_6, c_8$ e o oitavo quadro, bem como os restantes 2010 quadros, com as cores $c_1, \ldots, c_7$. Com esta coloração, ambas as condições do problema são satisfeitas.

   Mostremos agora que é sempre necessário usar pelo menos 7 cores distintas em cada quadro. Sejam $c_1, \ldots, c_n$ as cores do primeiro quadro, Q_1, do museu. Tem de existir um segundo quadro, Q_2, que não tem a cor c_1. Como quaisquer 7 quadros têm uma cor em comum, em particular Q_1 e Q_2 também têm de ter uma cor em comum. Essa cor não pode ser c_1. Admitamos, sem perda de generalidade, que é c_2. Tem de existir um quadro, Q_3, que não tem a cor c_2. Como quaisquer 7 quadros têm uma cor em comum, em particular Q_1, Q_2 e Q_3 também têm de ter uma cor em comum. Essa cor não pode ser c_1 nem c_2. Admitamos, sem perda de generalidade, que é c_3. Argumentando, sucessivamente, da mesma forma, é possível garantir a existência de um quadro Q_4 que tem a cor c_4 mas não tem a cor c_3, um quadro Q_5 que tem a cor c_5 mas não tem a cor c_4, um quadro Q_6 que tem a cor c_6 mas não tem a cor c_5 e um quadro Q_7 que tem a cor c_7 mas não tem a cor c_6. Logo $n \geq 7$.