XXXVI OPM - Final - 1º Dia - 23.03.2018 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Seja n um número em que o Artur pode ter pensado. O mais pequeno divisor de n é 1, pelo que os dois divisores seguintes têm de somar 16. O divisor seguinte de n terá de ser primo menor do que 8, pelo que temos as seguintes possibilidades:

   - Se fosse 2, o outro seria 14, mas então 7 também seria um divisor e seria mais pequeno;
   - Se fosse 3, o outro seria 13;
   - Se fosse 5, o outro seria 11;
   - Se fosse 7, o outro seria 9, mas então 3 também seria um divisor e seria mais pequeno.

   Assim, as únicas possibilidades para os menores divisores de n são $(1, 3, 13)$ e $(1, 5, 11)$.

   1º caso – $(1, 3, 13)$: Os maiores divisores de n são $(n, n/3, n/13)$ e então $n + n/3 + n/13 = 3905$, pelo que $n = 2769$.

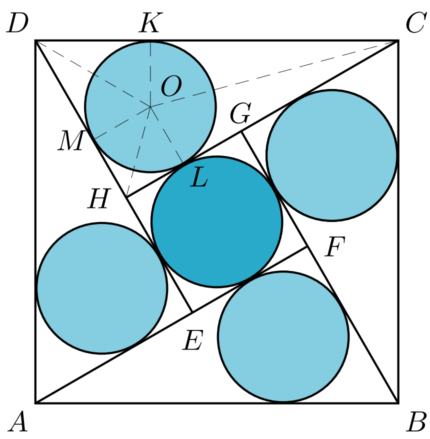
   2º caso – $(1, 5, 11)$: Os maiores divisores de n são $(n, n/5, n/11)$ e então $n + n/5 + n/11 = 3905$, pelo que $n = 3025$.

   Assim, existem duas soluções, 2769 e 3025.

2. Considerando os pontos de tangência K, L e M da circunferência inscrita no triângulo $[DCH]$ aos lados $[DC]$, $[CH]$ e $[HD]$, respetivamente, concluímos que a área de $[DCH]$ é dada por

$$A_{[DCH]} = \frac{r \cdot \overline{DC}}{2} + \frac{r \cdot \overline{CL}}{2} + \frac{r \cdot \overline{HL}}{2} + \frac{r \cdot \overline{HM}}{2} + \frac{r \cdot \overline{MD}}{2} = \frac{r}{2}(1 + \overline{CL} + r + r + \overline{MD}) = r(1+r)$$

   uma vez que $\overline{CL} + \overline{MD} = \overline{CK} + \overline{KD} = 1$.



   Os triângulos $[ADE]$, $[DCH]$, $[CBG]$ e $[BAF]$ são congruentes pois são triângulos retângulos semelhantes com a mesma hipotenusa. Assim, tem-se que

$$A_{[ABCD]} = 4 \cdot A_{[DCH]} + A_{[EFGH]},$$

   ou seja,

$$1^2 = 4 \cdot r(1+r) + (2r)^2.$$

   .

   Temos, então, $8r^2 + 4r - 1 = 0$, ou seja, $r = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$ ou $r = \frac{-\sqrt{3}-1}{4}$.
   Como $\frac{-\sqrt{3}-1}{4}$ é um número negativo o valor de r é $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

3. Comecemos por observar que, se uma coluna tiver apenas duas cores, digamos A e B, então as colunas adjacentes têm apenas as cores C e D, e, repetindo o raciocínio, concluimos que todas as colunas têm apenas duas cores. Do mesmo modo, se uma linha tiver apenas duas cores, então todas as linhas têm apenas duas cores.

   Além disso, todas as colunas têm apenas duas cores ou todas as linhas têm apenas duas cores. De facto, se uma coluna tem três ou mais cores, existem três casas consecutivas nessa coluna com cores diferentes, digamos A, B e C. Então as casas correspondentes nas colunas adjacentes têm as cores C, D e A, respetivamente. Do mesmo modo, as casas correspondentes nas colunas adjacentes a essas têm as cores A, B e C, respetivamente, e assim sucessivamente. Logo cada uma dessas três linhas tem apenas duas cores, pelo que todas as linhas têm apenas duas cores.

$\cdots$	A	C	A	C	A	$\cdots$
$\cdots$	B	D	B	D	B	$\cdots$
$\cdots$	C	A	C	A	C	$\cdots$

   Vamos contar quantas possibilidades de pintar o tabuleiro há em cada caso.

   - **Todas as colunas têm duas cores.** Há $4 \times 3 = 12$ formas de escolher as cores das primeiras duas casas da primeira coluna. Para cada uma das $n-1$ colunas seguintes, há 2 formas de escolher as cores das primeiras duas casas. Estas escolhas definem as cores de todas as casas do tabuleiro, logo ao todo há $12 \times 2^{n-1} = 6 \times 2^n$ formas de pintar o tabuleiro.
   - **Todas as linhas têm duas cores.** De modo análogo se conclui que há 6×2^m formas de pintar o tabuleiro.

   Os dois casos podem acontecer em simultâneo. Se todas as colunas e todas as linhas tiverem duas cores, a escolha das primeiras duas casas das primeiras duas linhas e colunas define a coloração de todo o tabuleiro, logo há 24 formas de pintar o tabuleiro.

   Assim, ao todo há $6 \times 2^n + 6 \times 2^m - 24$ formas de pintar o tabuleiro.