OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
http://www.spm.pt/olimpiadas
XXXVI OPM - Final - 1° Dia - 23.03.2018 - Categoria A - 8°/9° anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) A soma dos quatro algarismos é um número par, logo terá quatro, dois ou zero algarismos iguais a 1.

Se houver quatro algarismos iguais a 1, só há uma possibilidade, o código 1111.

Se houver dois algarismos iguais a 1, há seis formas de colocar os uns $(1\,1 * *, 1 * 1 *, 1 * * 1, * 1\,1 *, * 1 * 1, * * 1\,1)$. Nos outros dois algarismos, podemos colocar ou o algarismo 0 ou o algarismo 1. Assim, há $6 \times 2 \times 2 = 24$ códigos diferentes com dois algarismos iguais a 1.

Se não houver algarismos iguais a 1, cada um dos quatro algarismos pode ser igual a 0 ou igual a 2, logo haverá $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ códigos diferentes. Portanto há $1 + 24 + 16 = 41$ códigos diferentes.

Opção correta: A).

(b) Na figura, em quatro das cinco cartas, um quarto da carta está tapado, logo, no total, há uma carta tapada. Assim, a área de 4 cartas é 8 dm^2, logo cada carta tem $\frac{8}{4} = 2$ dm^2 de área. Em todas as figuras construídas do mesmo modo, há uma carta visível e cada uma das cartas restantes tem $1,5$ dm^2 visíveis. Assim $2018 - 2 = 2016$ dm^2 é a área das cartas que têm um quarto tapado. Como $2016 : 1,5 = 1344$, há 1344 cartas com um quarto tapado e a figura terá $1344 + 1 = 1345$ cartas.

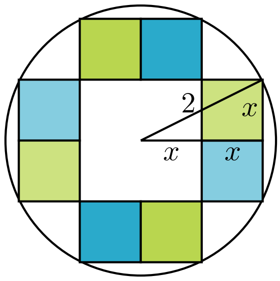
Opção correta: E).

(c) O número de adultos que pagou bilhete foi $\frac{3}{4} \times 120 = 90$. O número de crianças que pagou bilhete foi $\frac{1}{4} \times 120 = 30$. Por parte dos adultos, o clube arrecadou $270 - 30 = 240$ euros. Sendo x o número de adultos que pagaram o bilhete normal e y o número de pessoas com mais de 65 anos, tem-se que $x + y = 90$, ou seja, $x = 90 - y$. Por outro lado, atendendo ao valor arrecadado, temos $5x + 2y = 240$, logo $5 \times (90 - y) + 2y = 240$, ou seja, $y = 70$, donde se conclui que $x = 20$. Portanto, houve 20 adultos que pagaram o bilhete normal.

Opção correta: A).

(d) Seja x o comprimento do lado de cada quadrado. O triângulo representado na figura é retângulo, a hipotenusa é igual ao raio da circunferência e os catetos medem x e $2x$. Pelo teorema de Pitágoras, $x^2 + (2x)^2 = 2^2$, logo $x^2 = \frac{4}{5}$. Assim, a área de cada quadrado é $\frac{4}{5}$ cm^2.

Opção correta: B).



2. Seja n um número em que o Artur pode ter pensado. O mais pequeno divisor de n é 1, pelo que os dois divisores seguintes têm de somar 16. O divisor seguinte de n terá de ser primo menor do que 8, pelo que temos as seguintes possibilidades:

   - Se fosse 2, o outro seria 14, mas então 7 também seria um divisor e seria mais pequeno;
   - Se fosse 3, o outro seria 13;
   - Se fosse 5, o outro seria 11;
   - Se fosse 7, o outro seria 9, mas então 3 também seria um divisor e seria mais pequeno.

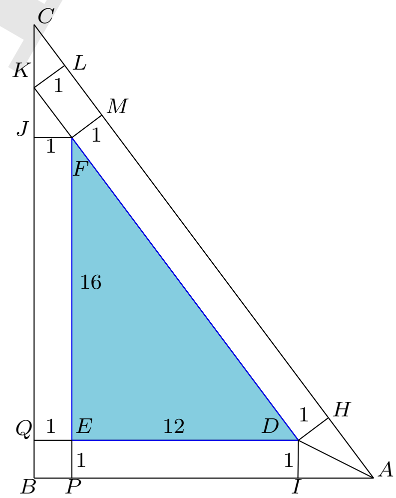
   Assim, as únicas possibilidades para os menores divisores de n são $(1,3,13)$ e $(1,5,11)$.

   1º caso – $(1,3,13)$: Os maiores divisores de n são $(n, n/3, n/13)$ e então $n + n/3 + n/13 = 3905$, pelo que $n = 2769$.

   2º caso – $(1,5,11)$: Os maiores divisores de n são $(n, n/5, n/11)$ e então $n + n/5 + n/11 = 3905$, pelo que $n = 3025$.

   Assim, existem duas soluções, 2769 e 3025.

3. O Teorema de Pitágoras permite concluir que o comprimento de $[DF]$, a hipotenusa do triângulo $[EDF]$, é $\sqrt{16^2+12^2} = 20$ m.



   Solução 1: Pelo critério AA, pode afirmar-se que os triângulos $[JKF]$ e $[EFD]$ são semelhantes logo,

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{JF}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{FK}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{JK}},$$

   donde se conclui que $\overline{FK} = \frac{5}{3}$ e $\overline{JK} = \frac{4}{3}$.

   Da mesma forma, dado que $[KCL]$ e $[DFE]$ são semelhantes e $\overline{KL} = 1$, conclui-se que $\overline{KC} = \frac{5}{3}$ e $\overline{LC} = \frac{4}{3}$. Assim, $\overline{JC} = \overline{JK} + \overline{KC} = 3$.

   Por fim, também os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes com razão de semelhança

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{1+16+\overline{JC}}{16} = \frac{5}{4},$$

   portanto,

$$\text{área de } [ABC] = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \times \text{ área de } [EFD] = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \times \frac{16 \times 12}{2} = 150\, m^2.$$

   (Observação: Em vez de utilizar a semelhança entre $[ABC]$ e $[DEF]$ poder-se-ia calcular $\overline{IA}$, de forma análoga ao cálculo de $\overline{JC}$. Determinados $\overline{JC}$ e $\overline{IA}$, o cálculo da área de $[ABC]$ é imediato.)

   Solução 2: Observe-se que $[AID]$ e $[AHD]$ são congruentes, logo $\overline{IA} = \overline{HA}$. Analogamente, $\overline{MC} = \overline{JC}$. Sejam $a = \overline{IA} = \overline{HA}$ e $b = \overline{MC} = \overline{JC}$. Os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes pois têm os três lados paralelos, logo,

$$\frac{20+a+b}{20} = \frac{16+1+b}{16} = \frac{12+1+a}{12},$$

   ou seja, $b - 4a + 5 = 0$ e $-3b + 2a + 5 = 0$.

   Resolvendo o sistema obtém-se $a = 2$ e $b = 3$. Portanto, a área do triângulo $[ABC]$ mede $(16+1+3) \times (12+1+2)/2 = 150$ m^2.