XXXV OPM - Final - 2º Dia - 07.04.2017 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) Ao adicionar 2017 a uma capicua de 1 ou 2 algarismos, a soma não pode ser uma capicua pois é menor que a capicua seguinte, 2112, exceto na soma $2017 + 99 = 2116$, que não é capicua.

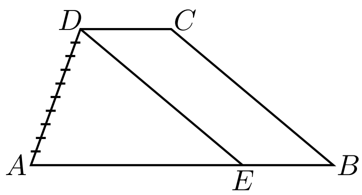
   Uma capicua com 3 algarismos é da forma aba, com a e b algarismos. A soma de aba com 2017 será menor ou igual a 3016, logo ou é uma capicua com o primeiro algarismo igual a 2 ou é igual a 3003. Uma vez que $3003 - 2017 = 986$, que não é capicua, resta ver o outro caso. Nesse caso, para a soma ser capicua tem de terminar no algarismo 2, portanto $7 + a = 12$, ou seja $a = 5$. O segundo algarismo de $2017 + 5b5$, ou é 5, ou é 6. Se for igual a 5, $b + 1 + 1 = 5$, ou seja, $b = 3$ e 535 satisfaz as condições pretendidas. Se o segundo algarismo for 6, a soma $b + 1 + 1$ teria de ser 16, o que é impossível por b ser um algarismo.

   Se a capicua tiver quatro algarismos ($abba$ com a e b algarismos) a soma $2017 + abba$ pode ter 5 ou 4 algarismos. Se tiver 5 algarismos, como o primeiro algarismo é 1, para ser uma capicua, $a + 7$ teria de ser igual a 11, ou seja, $a = 4$ e isso implica que a soma $2017 + abba$ não tem 5 algarismos. Se a soma $2017 + abba$ tiver 4 algarismos, esta soma será uma capicua se o algarismo das unidades de $a + 7$ for igual a $a + 2$ ou $a + 2 + 1$ e, é fácil verificar, ambos os casos são impossíveis.

   Se a capicua tiver 5 algarismos ($abcba$ com a, b e c algarismos) para que $abcba + 2017$ seja capicua o algarismo das unidades de $a + 7$ teria de ser igual a a ou $a + 1$ e ambos os casos são impossíveis. Para capicuas com mais do que cinco algarismos aplica-se um argumento análogo.

   Portanto, 535 é a única capicua que somada com 2017 ainda dá uma capicua. Opção correta: B).

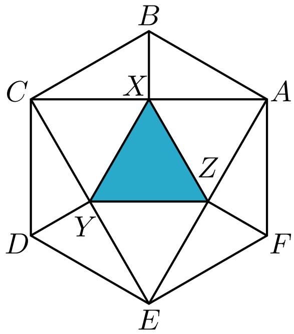
   (b) Seja E o ponto em $[AB]$ tal que $[DE]$ é paralelo a $[CB]$. Uma vez que $[DCBE]$ é um paralelogramo, tem-se $\overline{EB} = \overline{DC} = 1$ m e $\overline{DE} = \overline{BC} = 3$ m. Assim $\overline{AE} = 4 - 1 = 3$ m e o triângulo $[ADE]$ é isósceles. Uma vez que $D\hat{C}B = 140°$ também $D\hat{E}B = 140°$ e $A\hat{E}D = 180 - 140 = 40°$. No triângulo isósceles $[ADE]$, tem-se $D\hat{A}E = \dfrac{180 - 40}{2} = 70°$. Opção correta: D).



   (c) Os berlindes verdes aparecem seguindo a sequência $1, 2, 3, 4, \ldots$. De 1 até 62 têm-se $\dfrac{62 \times 63}{2} = 1953$ berlindes verdes. Entre estes berlindes verdes aparecem 62 berlindes azuis, ou seja, $1953 + 62 = 2015$ berlindes no total. Uma vez que o Emídio tem 2017 berlindes, após estes berlindes aparecem mais 2 berlindes verdes. O número de berlindes azuis do Emídio é 62. Opção correta: B).

   (d) Os vértices A e B, após a rotação vão ficar exatamente na mesma posição, porque pertencem ao eixo da rotação. Assim, as hipóteses B), C) e E) não estão corretas. Ao rodar e cortar o cubo, as faces vão ficar triangulares e um dos vértices de cada triângulo vai ser o ponto A ou o ponto B. Opção correta: A).

5. Denotemos por Z o terceiro vértice do lago e por E e F os vértices sobrantes do hexágono.



Os triângulos $[ABX]$, $[CBX]$, $[CDY]$ e $[EDY]$ têm, de acordo com o enunciado, ângulos internos de $30, 60$ e 90 graus. Como todos têm hipotenusa sobre um dos lados do hexágono regular, são todos congruentes. Isto implica que $[YCX]$ é isósceles. Tem-se $Y\widehat{C}X = D\widehat{C}B - D\widehat{C}Y - X\widehat{C}B = 120 - 30 - 30 = 60°$, pelo que $[YCX]$ é equilátero e congruente com o lago.

Assim, $\overline{EY} = \overline{YZ}$, pelo que $[EYZ]$ é isósceles. Analisando as somas de todos os ângulos em Y vemos que $E\widehat{Y}Z = 60°$, pelo que $[EYZ]$ é também equilátero e congruente com o lago. Um raciocínio análogo mostra que o mesmo é válido para $[AXZ]$. Finalmente, podemos concluir pelo critério LAL que $[EFZ]$ e $[AFZ]$ são congruentes com $[ABX]$.

Temos então o hexágono partido em quatro triângulos equiláteros e seis triângulos retângulos. Mas note-se que os seis triângulos retângulos formam um triângulo equilátero de lado igual a $[CA]$ se os deslocarmos de forma a que os vértices B, D e F coincidam. Por outro lado, os quatro triângulos equiláteros também formam um triângulo equilátero de lado $[CA]$. Assim a área destes triângulos equiláteros de lado $[CA]$ é metade da do hexágono, ou seja, 100 quilómetros quadrados. Como o lago é precisamente um quarto deste triângulo, concluímos que tem área igual a 25 quilómetros quadrados.

6. Designemos por N o número que procuramos e utilizemos as regras de divisibilidade para determinarmos os algarismos de N. Como N é divisível por 8, concluímos que os três últimos algarismos têm de ser iguais a 0. Além disso, como N é divisível por 9, o número de 1's em N tem de ser um múltiplo de 9. Portanto, qualquer número com nove algarismos 1 e que termine com três algarismos 0 é divisível por $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ e 9. Resta analisar a divisibilidade por 7.

O número 111111111000 não é divisível por 7, logo N tem pelo menos 13 algarismos. O resto da divisão de 1111111111000 por 7 é 2, pelo que basta encontrar um número da forma 10^k, com $3 \leq k \leq 12$, que também tenha resto 2 na divisão por 7. De facto, o resto da divisão de 100000000 por 7 é 2, logo $1111111111000 - 100000000 = 1111011111000$ é múltiplo de 7. Portanto, $N = 1111011111000$.