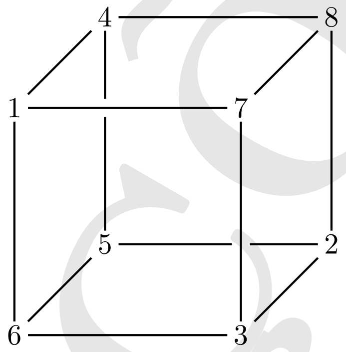
Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

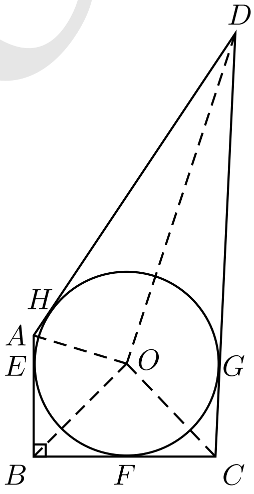
4. Para a soma de três números inteiros diferentes ser 10, um deles tem que ser maior ou igual do que 5. Sendo assim, em cada face há pelo menos dois números maiores ou iguais que 5, ou seja o maior número de cada face é pelo menos igual a 6. Como, em cada face, a soma de quaisquer três vértices é maior ou igual que 10 e há pelo menos um deles maior ou igual que 6, a soma dos quatro vértices é sempre pelo menos igual a 16.

   O exemplo seguinte mostra que é possível colocar os números de 1 até 8 nos vértices de um cubo de modo a que a soma dos números de uma das faces seja 16, e que a soma de quaisquer três vértices da mesma face seja maior ou igual que 10.



5. Sejam E, F, G, H os pontos de tangência da circunferência aos lados AB, BC, CD, DA, respetivamente, e r o raio da circunferência. Temos então as seguintes igualdades

$$\overline{EB} = \overline{BF},\ \overline{FC} = \overline{CG},\ \overline{GD} = \overline{DH},\ \overline{HA} = \overline{AE}.$$



Como $A\widehat{B}C = 90^\circ$, então $\overline{EB} = r$, de onde concluímos que

$$\overline{DA} = \overline{DH} + \overline{HA} = \overline{GD} + \overline{AE} = (7 - \overline{CG}) + (2 - \overline{EB}) = 9 - (\overline{FC} + \overline{BF}) = 6.$$

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{13}$. Como $\sqrt{13}^2 + 6^2 = 7^2$, então $[DAC]$ é um triângulo retângulo. A área do quadrilátero $[ABCD]$ é então

$$\frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} + \frac{\overline{DA} \times \overline{AC}}{2} = \frac{6}{2} + \frac{6\sqrt{13}}{2} = 3 + 3\sqrt{13}.$$

Por outro lado, denotando o centro da circunferência por O, a área de $[ABCD]$ é dada por

$$\frac{\overline{AB} \times \overline{EO} + \overline{BC} \times \overline{FO} + \overline{CD} \times \overline{GO} + \overline{DA} \times \overline{HO}}{2} = \frac{(2+3+7+6)r}{2} = 9r,$$

o que nos permite concluir que $r = \dfrac{1+\sqrt{13}}{3}$.

6. De um determinado andar X pode-se ir para 7 outros andares. Como cada par de andares é servido por pelo menos 3 elevadores, há pelo menos $7 \times 3 = 21$ pares de andares onde aparece o andar X.

   Suponhamos que no andar X param no máximo 5 elevadores. Cada um destes elevadores para no máximo em mais 4 andares, logo há no máximo 20 pares onde aparece o andar X, o que contradiz o que vimos anteriormente. Logo em cada andar param pelo menos 6 elevadores. Como há 8 andares, há pelo menos 48 paragens.

   Uma vez que cada elevador para no máximo em 5 andares, e $9 \times 5 < 48$, são necessário pelo menos 10 elevadores.

   Para concluirr que 10 elevadores são suficientes, basta observar que o esquema seguinte, que representa os andares $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ em que cada elevador $(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J)$ para, cumpre as condições do problema.