OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXV OPM - Final - 2º Dia - 07.04.2017 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

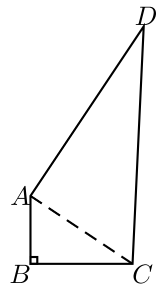
4. Ao adicionar 2017 a uma capicua de 1 ou 2 algarismos, a soma não pode ser uma capicua pois é menor que a capicua seguinte, 2112, exceto na soma $2017 + 99 = 2116$, que não é capicua.

   Uma capicua com 3 algarismos é da forma aba, com a e b algarismos. A soma de aba com 2017 será menor ou igual a 3016, logo ou é uma capicua com o primeiro algarismo igual a 2 ou é igual a 3003. Uma vez que $3003 - 2017 = 986$, que não é capicua, resta ver o outro caso. Nesse caso, para a soma ser capicua tem de terminar no algarismo 2, portanto $7 + a = 12$, ou seja $a = 5$. O segundo algarismo de $2017 + 5b5$, ou é 5, ou é 6. Se for igual a 5, $b + 1 + 1 = 5$, ou seja, $b = 3$ e 535 satisfaz as condições pretendidas. Se o segundo algarismo for 6, a soma $b + 1 + 1$ teria de ser 16, o que é impossível por b ser um algarismo.

   Se a capicua tiver quatro algarismos ($abba$ com a e b algarismos) a soma $2017+abba$ pode ter 5 ou 4 algarismos. Se tiver 5 algarismos, como o primeiro algarismo é 1, para ser uma capicua, $a+7$ teria de ser igual a 11, ou seja, $a = 4$ e isso implica que a soma $2017 + abba$ não tem 5 algarismos. Se a soma $2017 + abba$ tiver 4 algarismos, esta soma será uma capicua se o algarismo das unidades de $a + 7$ for igual a $a + 2$ ou $a + 2 + 1$ e, é fácil verificar, ambos os casos são impossíveis.

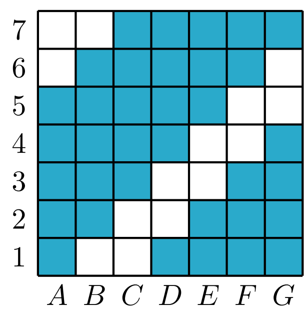
   Se a capicua tiver 5 algarismos ($abcba$ com a, b e c algarismos) para que $abcba+2017$ seja capicua o algarismo das unidades de $a + 7$ teria de ser igual a a ou $a + 1$ e ambos os casos são impossíveis. Para capicuas com mais do que cinco algarismos aplica-se um argumento análogo.

   Portanto, 535 é a única capicua que somada com 2017 ainda dá uma capicua.



5. Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{13}$.
   Como $\sqrt{13}^2 + 6^2 = 7^2$, então $[DAC]$ é um triângulo retângulo.
   A área do quadrilátero $[ABCD]$ é então

$$\frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} + \frac{\overline{DA} \times \overline{AC}}{2} = \frac{6}{2} + \frac{6\sqrt{13}}{2} = 3 + 3\sqrt{13}.$$



6. Do andar 1 pode-se subir para 6 andares, do andar 2 pode-se subir para 5 andares, e assim por diante, até ao andar 6 de onde se pode subir para 1 andar. Logo há $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ pares de andares. Cada par de andares é servido por pelo menos 3 elevadores, logo os elevadores têm que servir pelo menos $21 \times 3 = 63$ pares de andares.
   Como cada elevador para no máximo em 5 andares, então serve no máximo $4+3+2+1 = 10$ pares de andares. Uma vez que $6 \times 10 < 63$, são necessários pelo menos 7 elevadores.
   Para concluir que 7 elevadores são suficientes, basta observar que o esquema ao lado, que representa os andares $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ em que cada elevador (A, B, C, D, E, F, G) para, cumpre as condições do problema.