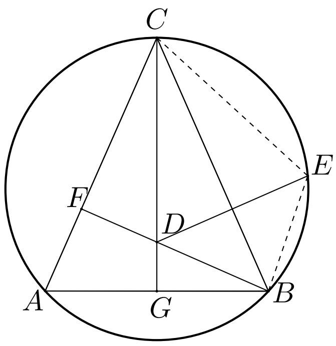
OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
http://www.spm.pt/olimpiadas
XXXV OPM - Final - 1º Dia - 06.04.2017 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Podemos escrever
$$\frac{14n+25}{2n+1} = \frac{7(2n+1)+18}{2n+1} = 7 + \frac{18}{2n+1}.$$
Como os divisores ímpares de 18 são ± 1, ± 3 e ± 9, basta analisarmos os inteiros n pertencentes ao conjunto $\{-5, -2, -1, 0, 1, 4\}$. Destes, temos que somente $n = -2$, $n = 0$ e $n = 4$ tornam a fração $\dfrac{14n+25}{2n+1}$ num quadrado perfeito, respetivamente em 1, 25 e 9.

2. Seja F o pé da altura que passa por B e G a inteseção da bissetriz em C com $[AB]$. Sendo $\dot{C}G$ a bissetriz de $\angle ACB$, tem-se $A\widehat{C}D = D\widehat{C}B = \alpha$. Tendo em conta que $[BF]$ é uma altura de $[ABC]$ e, por isso, $[CBF]$ é retângulo, tem-se $F\widehat{B}C = 90^\circ - 2\alpha$. Por outro lado, E é a reflexão de D por BC logo $B\widehat{C}E = D\widehat{C}B = \alpha$ e $C\widehat{B}E = D\widehat{B}C = 90^\circ - 2\alpha$. Ora, $C\widehat{A}E = C\widehat{B}E = 90^\circ - 2\alpha$ pois compreendem o mesmo arco de circunferência CE. Da mesma forma se conclui que $E\widehat{A}B = E\widehat{C}B = \alpha$. Assim, $C\widehat{A}B = 90^\circ - \alpha$ e, dado que $[BFA]$ é retângulo, tem-se $A\widehat{B}F = \alpha$. Por fim observe-se que $G\widehat{D}B = F\widehat{D}C = 90^\circ - \alpha$ e, portanto, $D\widehat{G}B = 90^\circ$, ou seja, a bissetriz $\dot{C}G$ é perpendicular a $[AB]$. Assim conclui-se que o triângulo $[ABC]$ é isósceles.



3. Seja T a soma dos números das camisolas de todos os atletas e n o número de provas. O enunciado diz-nos que $T = 20n$. Por outro lado, em cada equipa, a soma dos números de camisolas é pelo menos $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, já que todos os atletas têm números distintos. Assim temos que T é pelo menos 5 vezes isto, ou seja,
$$20n \geq \frac{5n(n+1)}{2}$$
pelo que $n \leq 7$. Resta mostrar que é possível realizar 7 provas com as condições do enunciado. Isso pode ser feito como indicado abaixo.

Equipa 1	1	2	3	4	5	6	7
Equipa 2	7	6	5	4	3	2	1
Equipa 3	1	2	3	4	5	6	7
Equipa 4	7	5	3	1	6	4	2
Equipa 5	4	5	6	7	1	2	3