

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

- (a) Opção C.
(b) Opção B.
(c) Opção B.
(d) Opção E.
- Se o ponto E é equidistante dos vértices A e B , então o triângulo $[ABE]$ é isósceles e portanto $\widehat{ABE} = \widehat{BAE}$. Uma vez que temos um quadrado, $\widehat{CBE} = 90 - \widehat{ABE} = 90 - \widehat{BAE} = \widehat{DAE}$. Assim, os triângulos $[CBE]$ e $[DAE]$ são iguais pelo critério LAL. Desta igualdade tem-se $\overline{CE} = \overline{DE}$, o triângulo $[ECD]$ é isósceles e $\widehat{ECD} = \widehat{CDE}$. Uma vez que $\widehat{ECD} = 90 - 35 = 55^\circ$, conclui-se que $\widehat{CED} = 180 - 2 \times \widehat{ECD} = 180 - 110 = 70^\circ$.

- Vamos demonstrar, primeiro, que todos os berlindes com números entre 2 e 30 têm de ser pintados com a mesma cor, segundo, que todos os berlindes com números não primos entre 31 e 60 têm de ser pintados com a mesma cor que os anteriores e, terceiro, que os berlindes com números primos entre 31 e 60 podem ser pintados com qualquer cor.

O dobro de qualquer número entre 2 e 30 é menor ou igual a 60 e é, simultaneamente, múltiplo desse número e de 2. Assim todos os berlindes com números entre 2 e 30 têm de ser pintados com a mesma cor do berlinde que tem o número dois.

Qualquer número não primo entre 31 e 60 tem um divisor entre 2 e 30 e, por isso, os berlindes com números não primos entre 31 e 60 têm de ser pintados com a mesma cor dos berlindes com números entre 2 e 30.

Por fim, qualquer número primo entre 31 e 60 não tem divisores nem múltiplos entre 2 e 60, para além dele próprio. Portanto os berlindes com estes números podem ser pintados com qualquer cor. Os números primos entre 31 e 60 são: 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59.

O número máximo de cores é, então, $7 + 1 = 8$.

- No primeiro dia de manhã, o Duarte pode escolher o tipo de bombom que vai comer de 3 formas diferentes. À tarde, o Duarte já só tem 2 escolhas possíveis. Assim, no primeiro dia há 6 maneiras diferentes do Duarte comer dois bombons de tipos diferentes. Denote-se por A o tipo de bombom que o Duarte comeu no primeiro dia de manhã, por B o tipo de bombom que ele comeu à tarde e por C o tipo de bombom que ele ainda não comeu.

Solução 1: No segundo dia o Duarte vai ter de comer um bombom do tipo C (porque não pode deixar os dois bombons deste tipo para o terceiro dia). Ele pode comer este bombom de manhã ou à tarde e escolher um bombom do tipo A ou B para completar este dia. Assim, há 4 maneiras diferentes do Duarte comer dois bombons no segundo dia. Restam dois bombons diferentes para o terceiro dia que ele pode comer de duas maneiras diferentes. Portanto o Duarte tem $6 \times 4 \times 2 = 48$ maneiras de comer os bombons.

Solução 2: O Duarte tem 4 possibilidades de escolher quando é que vai comer o segundo bombom do tipo A (no segundo ou terceiro dias e de manhã ou de tarde) e duas possibilidades de escolher quando é que vai comer o segundo bombom do tipo B (porque não pode comer o bombom do tipo B no mesmo dia em que come o segundo bombom do tipo A). Portanto o Duarte tem $6 \times 4 \times 2 = 48$ maneiras de comer os bombons.