XXXV OPM - 1ª Eliminatória - 09.11.2016 - Categoria B - 10º/12º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D. (*Em* $\cdots 201520162017 \cdots$, $\cdots 16201621 \cdots$ *e* $\cdots 62016202 \cdots$.)
   (b) Opção B. (*A sequência mínima é* $23 \to 26 \to 13 \to 16 \to 8 \to 11 \to 14$.)
   (c) Opção D. (*A diferença máxima obtém-se de* 98721, *e é* $9 \times 8 \times 7 - 7 \times 2 \times 1 = 490$.)
   (d) Opção C. (*As áreas dos triângulos pintados, brancos e quadriculados estão na razão* $1 : 2 : 3$.)

2. Seja S a soma indicada. Agrupando as parcelas de S em grupos de 5, observamos que

$$(10d+2)^2 + (10d+4)^2 + (10d+6)^2 + (10d+8)^2 + (10d+10)^2 = 500d^2 + 600d + 220,$$

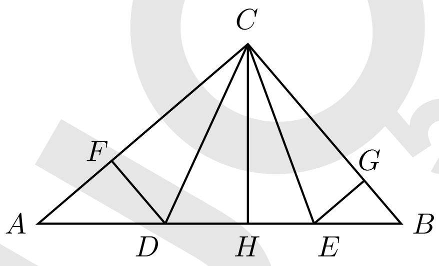
que termina em 20.

Como S tem 201 grupos destes e ainda as parcelas 2012^2, 2014^2 e 2016^2, então os dois últimos algarismos de S são os mesmos de

$$201 \times 20 + 44 + 96 + 56 = 4216,$$

ou seja, 16.

3. Como $\angle ACB$ está inscrito numa semicircunferência, então $A\widehat{C}B = 90°$. Seja H o pé da perpendicular de C sobre AB.



Como $\overline{AC} = \overline{AE}$, então $A\widehat{C}E = A\widehat{E}C$.

Logo $H\widehat{C}E = 180° - C\widehat{H}E - A\widehat{E}C = 90° - A\widehat{E}C = 90° - A\widehat{C}E = E\widehat{C}B$.

Portanto, os triângulos retângulos $[CHE]$ e $[CGE]$ são congruentes (uma vez que têm um lado em comum), pelo que $\overline{HE} = \overline{EG} = 16$.

Do mesmo modo, $\overline{DH} = \overline{FD} = 20$.

Assim, $\overline{DE} = \overline{DH} + \overline{HE} = 20 + 16 = 36$.

4. Seja k o número de dias que a Maria demorou a ler o livro. Têm-se as igualdades

$$p + (p+1) + \cdots + (p+k-1) = 374 \qquad \text{e} \qquad m + (m+1) + \cdots + (m+k-1) = 319.$$

Fazendo a soma, obtém-se $k(p+m+k-1) = 693$, pelo que k é um divisor de 693.

Fazendo a diferença, obtém-se $k(p-m) = 55$, pelo que k é um divisor de 55.

Como $mdc(693, 55) = 11$ e, além disso, $k \geq 2$, então $k = 11$.

Logo $p + (p+1) + \cdots + (p+10) = 374$, ou seja, $11p + 55 = 374$, donde $p = 29$.