OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

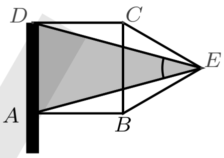
http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXV OPM - 1ª Eliminatória - 9.11.2016 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção B.
   (b) Opção C.
   (c) Opção C.
   (d) Opção D.



2. Uma vez que $\overline{DC} = \overline{CE} = \overline{AB} = \overline{BE}$, os triângulos $[DCE]$ e $[ABE]$ são isósceles e tem-se $D\hat{C}E = A\hat{B}E = 90+60 = 150^\circ$. Logo, $C\hat{E}D = A\hat{E}B = 15^\circ$ e o ângulo assinalado na figura mede $60 - 2 \times 15 = 30^\circ$.

3. O João dividiu as 490 gomas em sacos com 35 gomas cada um, portanto ficou com $490 : 35 = 14$ sacos. Havia mais gomas de laranja do que de ananás, ou seja havia mais sacos com gomas de laranja do que de ananás e por essa razão havia pelo menos 8 sacos com gomas de laranja. Por outro lado, as gomas de laranja não eram mais do que o dobro das gomas de ananás o que significa que havia 8 ou 9 sacos com gomas de laranja, e portanto 6 ou 5 sacos com gomas de ananás, respetivamente. Como os números 8 e 6 têm o 2 como divisor comum, nesse caso seria possível fazer sacos com o dobro das gomas cada um, e portanto usar apenas 7 sacos. Mas o João usou o menor número de sacos possível, donde se conclui que havia 9 sacos com 35 gomas de laranja cada um, e no pacote havia $9 \times 35 = 315$ gomas de laranja.

4. Se o número super alternado é da forma $I_1P_2I_3P_4$, onde I_1, I_3 são algarismos ímpares e P_2, P_4 são algarismos pares, o seu dobro terá 4 algarismos (se o dobro tivesse 5 algarismos, sendo par e alternado, tinha de começar por um algarismo par, mas isso é impossível porque o dobro tem de ser menor que $2 \times 9898 = 19796$). Deste modo

$$\begin{array}{cccc} I_1 & P_2 & I_3 & P_4 \\ & & \times & 2 \\ \hline I_8 & P_7 & I_6 & P_5 \end{array}$$

onde I_8, I_6 são algarismos ímpares e P_7, P_5 são algarimos pares. Relativamente a este produto temos:

1) Como $2 \times I_3$ é par, para que I_6 seja ímpar, o produto $2 \times P_4$ tem de ter dois algarismos, pelo que $P_4 \in \{6, 8\}$.

2) Como $2 \times P_2$ é par, o número $2 \times I_3 + 1$ só pode ter um algarismo, pelo que $I_3 \in \{1, 3\}$.

3) Como $2 \times I_1$ é par, o número $2 \times P_2$ tem de ter dois algarismos, donde segue que $P_2 \in \{6, 8\}$.

4) Finalmente, como $2 \times I_1 + 1 = I_8$ só pode ter um algarismo, temos que $I_1 \in \{1, 3\}$.

Concluímos que há $2^4 = 16$ números super alternados com 4 algarismos, cujo primeiro algarismo é ímpar.

Se o número super alternado é da forma $P_1I_2P_3I_4$, o seu dobro terá 4 algarismos e é par e alternado. Assim,

$$\begin{array}{cccc} P_1 & I_2 & P_3 & I_4 \\ & & \times & 2 \\ \hline I_8 & P_7 & I_6 & P_5 \end{array}$$

onde I_2, I_4, I_6, I_8 são algarismos ímpares e P_1, P_3, P_5, P_7 são algarismos pares. Como anteriormente, da análise deste produto concluímos:

1)Como $2 \times P_3$ é par, para que I_6 seja ímpar, o produto $2 \times I_4$ tem de ter dois algarismos, pelo que $I_4 \in \{5, 7, 9\}$.

2) Como $2 \times I_2$ é par, o número $2 \times P_3 + 1$ só pode ter um algarismo, pelo que $P_3 \in \{0, 2, 4\}$.

3) Como $2 \times P_1$ é par, o número $2 \times I_2$ tem de ter dois algarismos, donde segue que $I_2 \in \{5, 7, 9\}$.

4) Finalmente, o número $2 \times P_1 + 1 = I_8$ só pode ter um algarismo, temos que $P_1 \in \{2, 4\}$.

Concluímos que há $2 \times 3^3 = 54$ números super alternados com 4 algarismos, cujo primeiro algarimso é par.

Há no total $16 + 54 = 70$ números super alternados com 4 algarismos.