XXXIX OPM - 2ª Eliminatória - 28.04.2021 - Categoria A - 8°/9° anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D. $(1 + 3 \times 3333 = 10000)$
   (b) Opção E. $(5^4 + 3 \times (4 \times 5^3) + 4 \times 5^3 + 3 \times 5^4 = 4500)$
   (c) Opção B. $(\overline{BE} = \frac{2}{5}\overline{BC},\ \overline{CF} = \frac{15}{36}\overline{AB},$ Área$[ADF] = 17,5)$
   (d) Opção B. $(\textit{Atinge todos os degraus pares, e todos os degraus da forma } 4n + 3.)$

2. Há 5 escolhas possíveis para a letra do par de letras consecutivas iguais e 3 escolhas possíveis para a posição desse par (no ínicio, no meio ou no fim da palavra). Para cada uma das restantes letras há 4 escolhas possíveis.

   Assim, ao todo há $5 \times 3 \times 4 \times 4 = 240$ palavra no idioma Cinquês.

3. Observe-se que $\overline{AD} = \overline{BC}$, $A\hat{D}E = F\hat{B}C$ e $A\hat{E}D = B\hat{F}C$, por isso, os triângulos $[AED]$ e $[CFB]$ são congruentes e $\overline{DE} = \overline{FB}$.

   Por outro lado, $D\hat{A}B = A\hat{E}D$ e $A\hat{D}E = A\hat{D}B$, logo o critério AA garante que os triângulos $[AED]$ e $[BAD]$ são semelhantes. Assim,
   $$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}}$$
   donde se conclui que $\overline{AE} = 4$ e $\overline{ED} = 3$.

   Portanto, a linha poligonal $AEFC$ mede:
   $$\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FC} = \overline{AE} + (\overline{DB} - 2\,\overline{DE}) + \overline{AE} = 4 + 12 - 2 \times 3 + 4 = 14.$$

4. Como a Ana tem de se inscrever em pelo menos um desporto onde o João não esteja inscrito, o João pode escolher 1, 2 ou 3 desportos diferentes. Se optar por 1 desporto apenas, pode fazê-lo de 4 formas. Neste caso, a Ana tem de praticar o desporto escolhido pelo João e escolher pelo menos mais um desporto. Como ainda há 3 desportos disponíveis, a Ana tem 3 possibilidades se optar por apenas mais um desporto; 3 possibilidades se optar por 2 desportos; e 1 possibilidade apenas se optar pelos 3 desportos. Há portanto
   $$4 \times (3 + 3 + 1) = 28$$
   possibilidades.

   Se o João optar por praticar 2 desportos, pode escolhê-los de 6 formas diferentes. A Ana pode então escolher praticar mais 1 ou 2 desportos. Tem 2 possibilidades de escolher mais 1 desporto e tem 1 possibilidade de escolher praticar todos os desportos. Neste caso, há
   $$6 \times (2 + 1) = 18$$
   possibilidades.

   Finalmente, se o João optar por praticar 3 desportos, pode escolhê-los de 4 formas diferentes, enquanto que a Ana tem forçosamente de escolher todos os desportos. Há 4 possibilidades neste caso.

   Assim, há um total de $28 + 18 + 4 = 50$ possíveis escolhas.