XXXIX OPM - 1ª Eliminatória - 11.11.2020 - Categoria B - 10º/12º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção E. (*O* 2020^{o} *algarismo* 1 *aparece no número* 3181.)

   (b) Opção A. (*A altura do trapézio mede* 4 *e* $\overline{AC} = 5$.)

   (c) Opção B. (*Há* 4 *números superduplex com um algarismo,* 40 *com dois e* 86 *com três.*)

   (d) Opção D. (*Tem-se* $3 \times \left(2^4 + 10 \times 2^3 + 15 \times 2^2 + 7 \times 2 + 1\right) = 513$.)

2. Seja n o número escrito pelo Tiago. Se $n \geq 50000$ então $2n$ terá 6 ou mais algarismos, logo haverá alguma repetição nos algarismo de n e $2n$, pois existirão no mínimo 11 algarismos.

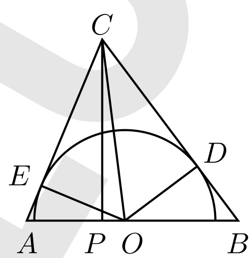
   De forma a maximizar o número escrito pelo Tiago, vamos supor que este começa por 49, isto é $49000 \leq n \leq 49999$. Neste caso, $98000 < 2n < 99998$, o que implica haver repetição do algarismo 9. Supomos então que $48000 \leq n \leq 48999$, logo $96000 \leq 2n \leq 97998$. Neste caso os algarismos $4, 8$ e 9 já estão utilizados.

   Para maximizar n, supomos $48700 \leq n \leq 48799$, o que implica $97400 \leq n \leq 97598$, obrigando a repetir-se o algarismo 7. Suponhamos então que $48600 \leq n \leq 48699$, o que implica $97200 \leq n \leq 97398$, fixando assim a posição de $4, 8, 6, 9$ e 7.

   Para maximizar n, supomos $48650 \leq n \leq 48659$. Neste caso temos que o algarismo das unidades é $0, 1, 2$ ou 3, mas não pode ser 2 ou 3, porque isso obrigaria $2n$ a ter como algarismos das unidades 4 ou 6, respetivamente, forçando uma repetição de algarismos.

   Finalmente, basta notar que o número 48651 tem a propriedade enunciada, pois ele e o seu dobro, 97302, contêm todos os algarismos sem repetições.

3. Seja P o pé da altura do triângulo $[ABC]$ relativamente ao lado $[AB]$.
   Pelo Teorema de Pitágoras, temos $\overline{PA} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ e $\overline{PB} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.



   Logo a área de $[ABC]$ é $\dfrac{\overline{AB} \times \overline{PC}}{2} = \dfrac{(5+9) \times 12}{2} = 84$.

   Sejam O o centro da semicircunferência, r o seu raio e D e E os pontos de tangência dos segmentos $[CB]$ e $[AC]$ com a semicircunferência, respetivamente.

   Então temos área de $[ABC]$ =área de $[AOC]$+ área de $[BOC] = \dfrac{\overline{AC} \times r}{2} + \dfrac{\overline{BC} \times r}{2} = 14r$.

   Logo $14r = 84$, ou seja, $r = 6$.

4. **Solução 1:** Notemos que para uma lista (x_1, x_2, x_3, x_4) não ser adequada tem que ocorrer exatamente um dos seguintes três casos:

   (a) todos as preferências x_1, x_2, x_3, x_4 estão em $\{2, 3, 4\}$ – neste caso há 3 escolhas para cada preferência, logo ao todo há $3^4 = 81$ listas possíveis.

   (b) existe uma preferência igual a 1 e três preferências estão em $\{3, 4\}$ – neste caso, temos 4 possibilidades para a preferência igual a 1 e para as restantes há 2 escolhas, logo ao todo há $4 \times 2^3 = 32$ listas possíveis.

   (c) existe uma preferência igual a 1, outra em $\{1, 2\}$ e duas preferências iguais a 4 – neste caso, temos 6 possibilidades para as preferências iguais a 4 e 3 possibilidades para as restantes, nomeadamente, $1 - 1$, $1 - 2$ ou $2 - 1$. Logo, ao todo, há $6 \times 3 = 18$ listas possíveis.

   Assim, há $81 + 32 + 18 = 131$ listas não adequadas. Como o número total de listas sem restrições é $4^4 = 256$, então há $256 - 131 = 125$ listas adequadas.

   Solução 2: Adicionemos um lugar extra após o $4.^\circ$ lugar, designado por lugar 5, e rearranjemos os lugares de estacionamento num circulo. É claro que agora todos os condutores podem estacionar e haverá exatamente um lugar de estacionamento livre após todos os condutores estacionarem. Nesta situação, uma lista de preferências é adequada se e só se o lugar 5 é o lugar livre após todos os condutores estacionarem. Por simetria, apenas $1/5$ das 5^4 listas de preferências (a_1, a_2, a_3, a_4), com $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ para $i = 1, 2, 3, 4$, leva a que o lugar 5 fique livre, pelo que há exatamente $5^3 = 125$ listas de preferências adequadas.