OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
www.olimpiadas.spm.pt

XXXIX OPM - 1ª Eliminatória - 11.11.2020 - Categoria B - 10º/12º anos

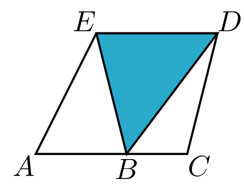
Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O Francisco começou a escrever, por ordem crescente, os números naturais. Ao fim de algum tempo, escreveu o algarismo 1 pela 2020^a vez. Qual foi o algarismo que o Francisco escreveu logo a seguir?

   A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

   (b) Na figura está representado um trapézio $[ACDE]$, com área 18, tal que $\overline{ED} = 4$. Sabe-se que a altura do trapézio é um número inteiro e que o comprimento de $[AC]$ é um número inteiro ímpar. Quanto mede a área de $[EDB]$?



   A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

   (c) Um número diz-se *superduplex* se a soma dos seus algarismos for maior do que a soma dos algarismos do seu dobro. Por exemplo, 286 é superduplex, porque $286 \times 2 = 572$ e $2 + 8 + 6 > 5 + 7 + 2$. Quantos números naturais menores do que 500 são superduplex?

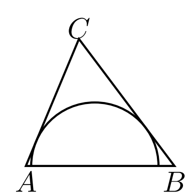
   A) 110 B) 130 C) 150 D) 180 E) 200

   (d) Na rua do Francisco há dez casas. As casas estão em fila lado a lado. De quantas maneiras é possível pintar todas as casas de azul, branco e castanho de modo que cada casa tenha pelo menos um vizinho com a casa pintada da mesma cor?

   A) 32 B) 96 C) 465 D) 513 E) 1024

2. O Miguel escreveu o número 13845 no quadro e reparou que este número e o seu dobro, 27690, usam cada um dos algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ exatamente uma vez. De seguida, o Tiago escreveu um número maior com a mesma propriedade. Qual é o maior número que o Tiago pode ter escrito?

3. Na figura seguinte, a semicircunferência está inscrita no triângulo $[ABC]$ e tem o diâmetro sobre o lado $[AB]$. Sabendo que $\overline{AC} = 13$, $\overline{CB} = 15$ e a altura relativamente ao lado $[AB]$ mede 12, determina o raio da semicircunferência.



4. Uma rua de sentido único tem 4 lugares de estacionamento, numerados de 1 a 4. Nesta rua conduzem 4 condutores à procura de estacionamento. Cada um dos condutores tem o seu lugar de estacionamento favorito, respetivamente x_1, x_2, x_3 e x_4, e estaciona nele, se estiver livre. Caso contrário estaciona no primeiro lugar livre após o seu lugar favorito. Se não há lugares livres após o seu lugar favorito o condutor desiste de estacionar e vai-se embora.

   Por exemplo, se o primeiro condutor prefere o lugar $x_1 = 2$, o segundo condutor prefere o lugar $x_2 = 4$, o terceiro condutor prefere o lugar $x_3 = 2$ e o quarto condutor prefere o lugar $x_4 = 1$, conseguem todos estacionar: o primeiro no lugar 2, o segundo no lugar 4, o terceiro no lugar 3 e o quarto no lugar 1. Dizemos então que $(2, 4, 2, 1)$ é uma lista de preferências *adequada*.

   Quantas listas (x_1, x_2, x_3, x_4) de preferências adequadas existem?