

Questão 1:

cada opção correta: 4 pontos

cada opção errada: -1 ponto

Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

- (a) Opção D. (Há 120 moedas e 7 caixas, uma vez que $7 \times 17 + 1 = 6 \times 20$.)

(b) Opção B. (Os três triângulos pequenos têm o valor de 10, 3 e 2.)

(c) Opção E. ($\widehat{DBA} = 50^\circ$ e $\widehat{BAD} = 70^\circ$.)

(d) Opção E. (Cada par de casas consecutivas está pintado da mesma cor, logo há 3×2^4 escolhas.)
- Seja x o número de lápis do João. Como, ao formar grupos com duas canetas e um lápis, as canetas acabaram quando restavam cinco lápis, então o João tem $2 \times (x - 5) = 2x - 10$ canetas. Por outro lado, ao formar grupos de três lápis e uma caneta, os lápis acabaram quando restavam 25 canetas, logo, $x = 3 \times ((2x - 10) - 25)$, ou seja, $x = 6x - 105$. Logo o João tem $x = 21$ lápis e $2x - 10 = 32$ canetas.

- Seja h a altura do trapézio. Usando a fórmula da área de um trapézio e os dados do enunciado, sabemos que

$$18 = \frac{4 + \overline{AC}}{2} \times h,$$

ou equivalentemente,

$$36 = (4 + \overline{AC}) \times h.$$

Como \overline{AC} é um inteiro ímpar e h é um inteiro, para determinar estes valores, precisamos de analisar as fatorizações inteiras de 36 como produto de dois inteiros, tais que um deles $(4 + \overline{AC})$ é ímpar e maior do que 4. Ora, a única possibilidade é $36 = 9 \times 4$. Daí concluímos que $\overline{AC} = 9 - 4 = 5$ e $h = 4$. Como as alturas do trapézio e do triângulo azul coincidem, temos que a área de $[EDB]$ mede $\frac{4 \times 4}{2} = 8 \text{ cm}^2$.

- Comecemos por notar que $1 + \frac{1}{a}$ diminui quando a aumenta. Se $a \geq 2$, então cada um dos fatores é menor ou igual a $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Assim teríamos $\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left(1 + \frac{1}{d}\right) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} < 10$. Logo $a = 1$ e, portanto,

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left(1 + \frac{1}{d}\right) = 5.$$

Se $b \geq 2$, então cada um dos fatores é menor ou igual a $\frac{3}{2}$, pelo que $\left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left(1 + \frac{1}{d}\right) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} < 5$. Logo $b = 1$ e, portanto,

$$\left(1 + \frac{1}{c}\right) \left(1 + \frac{1}{d}\right) = \frac{5}{2}.$$

De modo idêntico, se $c \geq 2$, teríamos $\left(1 + \frac{1}{c}\right) \left(1 + \frac{1}{d}\right) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} < \frac{5}{2}$. Logo $c = 1$ e, portanto,

$$\left(1 + \frac{1}{d}\right) = \frac{5}{4}, \text{ o que implica } d = 4.$$

Logo $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 4)$ é a única solução.