OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

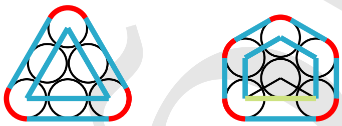
http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXIV OPM - Final - 2º Dia - 19.03.2016 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) Nas configurações A, B, C, E, o comprimento do elástico é igual à soma do perímetro da circunferência (secção do lápis), representado a vermelho nas figuras, com seis diâmetros (representados a azul). Na configuração D, o comprimento do elástico é a soma do perímetro da circunferência com menos de seis diâmetros, porque o segmento assinalado a verde é, pela desigualdade triangular, menor que dois diâmetros. Opção correta: D)



(b) **Solução 1**: Ao multiplicar as três áreas das faces, $2 \times 8 \times 9 = 144$, obtém-se um produto onde o comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo aparecem duas vezes, ou seja, este produto é o quadrado do volume. O volume é portanto 12 cm^3. Opção correta: B)

Solução 2: Uma vez que 8 é o quádruplo de 2, nos dois números que multiplicados dão 9, um deles é o quádruplo do outro. Conclui-se que os números são 6 e $1,5$ e uma vez que $2 = 1,5 \times \frac{4}{3}$, o número restante é $\frac{4}{3}$. Portanto o volume do paralelepípedo é $6 \times 1,5 \times \frac{4}{3} = 12$ cm^3. Opção correta: B)

(c) A duração total das músicas da sequência é $2 + 3 + 1,5 + 1 + 5,5 = 13$ minutos. Uma vez que $60 = 4 \times 13 + 8$, se a música "Sol" estiver no ínicio, repete-se quatro vezes a sequência "SolDóRéMiFá" e nos restantes 8 minutos ouve-se a música "Sol" ($5,5$ minutos), a "Dó" (2 minutos) e meio minuto da "Ré", terminando então na música "Ré". Se a música "Sol" estiver no final, repete-se quatro vezes a sequência "DóRéMiFáSol" e nos restantes 8 minutos ouve-se a música "Dó" (2 minutos), a "Ré" (3 minutos), a "Mi" ($1,5$ minutos), a "Fá" (1 minuto) e meio minuto da "Sol", terminando então na música "Sol". Estando a música entre o ínicio e o final da música "Sol" podem estar a tocar as músicas entre a "Ré" e a "Sol", ou seja, a única que não pode estar a tocar é a música "Dó". Opção correta: A)

(d) Entre 1 e 999999, ou seja, considerando todos os números até 6 algarismos formados apenas pelos algarismos 0 e 1, em cada posição, unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, etc..., o algarismo 1 aparece em $2^5 = 32$ números, uma vez que para cada uma das posições restantes podemos escolher o algarismo 0 ou o algarismo 1. Assim, a soma de todos os números até 6 algarismos só formados pelos algarismos 0 e 1 é $32 \times (1+10+100+1000+10000+100000) = 32 \times 111111 = 3555552$. Adicionando 1000000, obtém-se 4555552. Opção correta: E)

5. Seja N um número constituído por quatro algarismos, múltiplo de 6 e tal que a soma dos quadrados dos seus algarismos é 41. Comecemos por notar que sendo múltiplo de 6, o número N é par e a soma dos seus algarismos é divisível por 3. Como $4 \times 3^2 = 36 < 41$, então o maior algarismo de N é maior do que 3. Por outro lado, $7^2 = 49 > 41$, logo o maior algarismo de N é menor do que 7.

Se o maior algarismo de N for 4, então os restantes três algarismos têm necessariamente de ser $0, 3$ e 4, de forma a que a soma dos seus quadrados seja 41. No entanto, a soma dos algarismos é $4+0+3+4=11$, que não é divisível por 3. Neste caso, não há nenhum número nas condições pretendidas.

Se o maior algarismo de N for 5, então os restantes algarismos têm necessariamente de ser $0, 0$ e 4, de forma a que a soma dos seus quadrados seja 41. Obtemos assim os números $5004, 5040, 5400, 4050, 4500$.

Se o maior algarismo de N for 6, então os restantes três algarismos têm necessariamente de ser $0, 1$ e 2 de forma a que a soma dos seus quadrados seja 41. Obtemos assim os números 1026, 1206, 2016, 2106, 1062, 1602, 6012, 6102, 1260, 1620, 2160, 2610, 6120, 6210.

6. No fim de cada volta são distribuídos $1+2+3+5=11$ pontos. Logo, a soma dos pontos dos 8 corredores é, em qualquer altura, um múltiplo de 11. Há 8 sequências de 8 números consecutivos que contêm o 2016: $\{2009, 2010, \ldots, 2016\}, \{2010, 2011, \ldots, 2017\}, \ldots, \{2016, 2017, \ldots, 2023\}$. A única dessas sequências cuja soma dos termos é múltipla de 11 é $\{2015, 2016, \ldots, 2022\}$, uma vez que $2015+2016+\ldots+2022=16148=11\times 1468$.

Logo, se a sequência de pontos $\{2015, 2016, \ldots, 2022\}$ for obtida, só pode ser ao fim de 1468 voltas.

Mostramos agora que é possível obter a sequência $\{2015, 2016, \ldots, 2022\}$ apresentando um possível processo de distribuição dos pontos. O processo tem dois passos básicos: primeiro construimos a partir de $\{0, 0, \ldots, 0\}$ a sequência de números consecutivos $\{2, 3, \ldots, 9\}$ e num segundo passo mostramos que podemos sempre, a partir de uma sequência $\{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$, obter $\{a_1+11, a_2+11, \ldots, a_8+11\}$.

Passo 1:

Pontuação inicial	0	0	0	0	0	0	0	0
1^a volta	2	0	3	0	5	0	0	1
2^a volta	0	3	1	0	0	0	2	5
3^a volta	0	0	0	3	1	2	5	0
4^a volta	0	0	0	2	0	5	1	3
Pontuação após 4 voltas	2	3	4	5	6	7	8	9

Passo 2:

Pontuação após k voltas	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$(k+1)^a$ volta	1	2	3	5	0	0	0	0
$(k+2)^a$ volta	0	1	2	3	5	0	0	0
$(k+3)^a$ volta	0	0	1	2	3	5	0	0
$(k+4)^a$ volta	0	0	0	1	2	3	5	0
$(k+5)^a$ volta	0	0	0	0	1	2	3	5
$(k+6)^a$ volta	5	0	0	0	0	1	2	3
$(k+7)^a$ volta	3	5	0	0	0	0	1	2
$(k+8)^a$ volta	2	3	5	0	0	0	0	1
Pontuação após $k+8$ voltas	a_1+11	a_2+11	a_3+11	a_4+11	a_5+11	a_6+11	a_7+11	a_8+11

Começando com a sequência $\{0, 0, \ldots, 0\}$, aplicamos o passo 1 e obtemos, ao fim de 4 voltas, a sequência $\{2, 3, \ldots, 9\}$. Depois, como $2013=11\times 183$, se aplicarmos 183 vezes o passo 2 obtemos a sequência $\{2+2013, 3+2013, \ldots, 9+2013\}=\{2015, 2016, \ldots, 2022\}$, ao fim de mais $183\times 8=1464$ voltas.