XXXIV OPM - Final - 2º dia - 19.03.2016 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

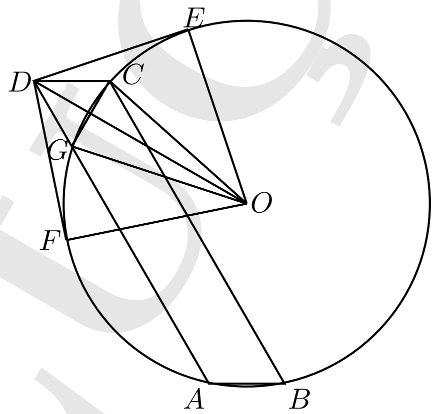
4. Seja N um número constituído por quatro algarismos, múltiplo de 6 e tal que a soma dos quadrados dos seus algarismos é 41. Comecemos por notar que sendo múltiplo de 6, o número N é par e a soma dos seus algarismos é divisível por 3. Como $4 \times 3^2 = 36 < 41$, então o maior algarismo de N é maior do que 3. Por outro lado, $7^2 = 49 > 41$, logo o maior algarismo de N é menor do que 7.

   Se o maior algarismo de N for 4, então os restantes três algarismos têm necessariamente de ser $0, 3$ e 4, de forma a que a soma dos seus quadrados seja 41. No entanto, a soma dos algarismos é $4 + 0 + 3 + 4 = 11$, que não é divisível por 3. Neste caso, não há nenhum número nas condições pretendidas.

   Se o maior algarismo de N for 5, então os restantes algarismos têm necessariamente de ser $0, 0$ e 4, de forma a que a soma dos seus quadrados seja 41. Obtemos assim os números $5004, 5040, 5400, 4050, 4500$.

   Se o maior algarismo de N for 6, então os restantes três algarismos têm necessariamente de ser $0, 1$ e 2 de forma a que a soma dos seus quadrados seja 41. Obtemos assim os números 1026, 1206, 2016, 2106, 1062, 1602, 6012, 6102, 1260, 1620, 2160, 2610, 6120, 6210.

5. Sejam O o centro da circunferência e G o segundo ponto de interseção da circunferência com AD.



   Como E e F são pontos de tangência a partir de D, então $D\widehat{E}O = D\widehat{F}O = 90°$. Então os triângulos $[DEO]$ e $[DFO]$ são congruentes, uma vez que $[EO]$ e $[FO]$ são raios e $[DO]$ é comum aos dois triângulos. Logo $O\widehat{D}F = O\widehat{D}E$.

   Como $A\widehat{D}E = C\widehat{D}F$, então $C\widehat{D}O = C\widehat{D}F - O\widehat{D}F = G\widehat{D}E - O\widehat{D}E = G\widehat{D}O$. Como anteriormente, concluimos que os triângulos $[DCO]$ e $[DGO]$ são congruentes. Portanto $\overline{CD} = \overline{GD}$.

   Por outro lado, $[BC]$ e $[AG]$ são cordas paralelas, logo $\overline{AB} = \overline{CG}$. Como $[ABCD]$ é um paralelogramo, tem-se $\overline{AB} = \overline{CD}$. Portanto, $\overline{CD} = \overline{CG} = \overline{GD}$, ou seja, o triângulo $[CGD]$ é equilátero. Assim, $A\widehat{B}C = C\widehat{D}G = 60°$.

   Nota: No problema não é referido que $[BC]$ é um diâmetro da circunferência e de facto, isto não acontece em geral.

6. O número máximo de jogadores é 6.

   Fixemos o jogador A. Ele ganhou a dois jogadores, B e C. Cada um destes ganhou a dois outros jogadores, D e E, e F e G respetivamente. Como para cada jogador X, ou A ganhou a X, ou A ganhou a alguém que ganhou a X, não podem existir mais jogadores para além de A, B, C, D, E e F, pelo que a resposta não é superior a 7.

   Suponhamos que é 7, ou seja, que todos estes jogadores são diferentes. Como C não ganhou a A, B, D e E, então ganhou a alguém que ganhou a estes jogadores. Logo, as quatro vitórias de F e G têm de ter sido sobre estes quatro jogadores. Mas então o F não ganhou ao G nem ganhou a ninguém que ganhou ao G, pelo que não há qualquer distribuição de vitórias que obedeça às regras pretendidas.

   Para mostrar que com 6 jogadores é possível, basta considerar, por exemplo, as vitórias:

   - A ganha a B e a C;
   - B ganha a D e a E;
   - C ganha a E e a F;
   - D ganha a C e a F;
   - E ganha a D e a A;
   - F ganha a A e a B.