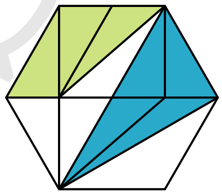
XXXIV OPM - Final - 1º dia - 18.03.2016 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Se traçarmos as três medianas de triângulos indicadas na figura, decompomos as regiões pintadas em sete triângulos com a mesma base e a mesma altura. Assim concluímos que a área pintada de verde mede $\frac{3}{4}$ da área pintada de azul, ou seja, $\frac{3}{4} \times 420 = 315$. Opção correta: D).



(b) Entre 1 e 9 há 9 números sem algarismos repetidos.

Entre 10 e 99 há $9 \times 9 = 81$ números sem algarismos repetidos, pois podemos formar um tal número escolhendo qualquer número entre 1 e 9 para o primeiro algarismo e qualquer número entre 0 e 9, distinto da primeira escolha, para o segundo algarismo.

De forma análoga, entre 100 e 999 há $9 \times 9 \times 8 = 648$ números sem algarismos repetidos.

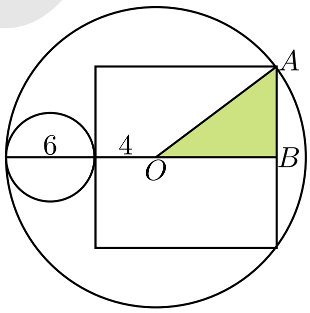
Entre 1000 e 1999 há $9 \times 8 \times 7 = 504$ números sem algarismos repetidos.

Finalmente, entre 2000 e 2016 há 4 números sem algarismos repetidos. Assim, o número 2016 aparece na nova lista na posição $9 + 81 + 648 + 504 + 4 = 1246$. Opção correta: B).

(c) Uma vez que $(a\sharp b)\sharp c = (ab^2 + a)\sharp c = a(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ e que $765 = 3^2 \times 5 \times 17$, conclui-se que as únicas soluções para a igualdade $a(b^2 + 1)(c^2 + 1) = 765$ obtêm-se fazendo $a = 9$, sendo ($b^2 + 1 = 5$ e $c^2 + 1 = 17$) ou ($b^2 + 1 = 17$ e $c^2 + 1 = 5$). Opção correta: D).

(d) Consideremos o triângulo retângulo $[OAB]$, onde O é o centro da circunferência de raio 10, A é o vértice superior direito do quadrado e B o ponto médio do lado direito do quadrado, tal como indicado a verde na figura seguinte.

Seja $\overline{AB} = b$. Temos $\overline{OA} = 10$, e, como a circunferência mais pequena tem diâmetro 6, $\overline{OB} = 2b - 4$. Pelo Teorema de Pitágoras, $10^2 = b^2 + (2b - 4)^2$. A única solução positiva desta equação é $b = 6$, pelo que o lado do quadrado mede 12 unidades. Opção correta: D).



SOLUÇÕES

2. Para cada mês mm de 1 a 12, temos cem números matriculares $\frac{aa}{mm}$, mas sempre que aa e mm tiverem um divisor em comum diferente de 1, a fração pode ser simplificada e obtém-se um número já contabilizado. Precisamos apenas então de contar, para cada mês, quantas terminações de anos não têm apenas o 1 como divisor comum.

   (i) Janeiro - Há 100 números;

   (ii) Fevereiro - Simplificam as 50 frações com aa múltiplo de 2, pelo que há 50 novos números;

   (iii) Março - Simplificam as 34 frações com aa múltiplo de 3, pelo que há 66 novos números;

   (iv) Abril - Simplificam as 50 frações com aa múltiplo de 2, pelo que há 50 novos números;

   (v) Maio -Simplificam as 20 frações com aa múltiplo de 5, pelo que há 80 novos números;

   (vi) Junho - A fração $\frac{aa}{6}$ pode ser simplificada se aa for múltiplo de 2 ou de 3. Há 50 múltiplos de 2 e 34 de 3 sendo que destes 17 são comuns, pois são múltiplos de 6. Assim temos $50 + 34 - 17 = 67$ números que simplificam, restando-nos 33 novos números;

   (vii) Julho - Simplificam as 15 frações com aa múltiplo de 7, pelo que há 85 novos números;

   (viii) Agosto - Simplificam as 50 frações com aa múltiplo de 2, pelo que há 50 novos números;

   (ix) Setembro - Simplificam as 34 frações com aa múltiplo de 3, pelo que há 66 novos números

   (x) Outubro - Simplificam os múltiplos de 5 e os de 2. Temos 20 de uns e 50 dos outros sendo que 10 são comuns pois são múltiplos de 10. São portanto $50 + 20 - 10 = 60$ que simplificam e restam 40 novos números;

   (xi) Novembro - Simplificam as 10 frações com aa múltiplo de 11, pelo que há 90 novos números;

   (xii) Dezembro - Tal como em Junho, simplificam múltiplos de 2 e 3, pelo que há 33 novos números.

   Existem assim $100 + 50 + 66 + 50 + 80 + 33 + 85 + 50 + 66 + 40 + 90 + 33 = 743$ números matriculares distintos.

3. Vamos primeiro considerar que 2016 é a soma de um número ímpar de números consecutivos, $2n + 1$, e que x é o elemento que está exatamente no meio da sequência. Neste caso a soma da sequência é igual a $(x - n) + (x - n + 1) + \cdots + x + \cdots + (x + n) = (2n + 1) \times x$, onde x é maior do que n porque todos os elementos da sequência são positivos. O número $2n + 1$ é um número ímpar, portanto as possíveis escolhas para $2n + 1$ são os divisores ímpares de 2016: 1, 3, 7, 9, 21 e 63, a que correspondem as somas: 2016, $671+672+673$, $285+286+\cdots+291$, $220+221+\cdots+228$, $86+87+\cdots+106$ e $1+2+3+\cdots+62+63$.

   Consideremos agora que 2016 é a soma de um número par de números consecutivos, $2n$, e que x e $x + 1$ são os dois elementos que estão exatamente no meio da sequência. Neste caso a soma da sequência é igual a $(x - n + 1) + \cdots + x + (x + 1) \cdots + (x + n) = (2x + 1) \times n = 2016$, onde x é maior ou igual do que n. O número $2x + 1$ é um divisor ímpar de 2016, e portanto o número n é um divisor par de 2016, de tal modo que $x \geq n$. Como o maior divisor ímpar de 2016 é 63, tem-se que $x \leq 31$ e que $n \geq 32$, uma vez que $(2x + 1) \times n = 2016$. Ou seja é impossível encontrar $x \geq n$ tais que $(2x + 1) \times n = 2016$, o que significa que não existe nenhuma sequência com um número par de números consecutivos, cuja soma seja 2016.

   Concluímos assim que se pode escrever 2016 de seis maneiras diferentes como soma de uma sequência de números naturais consecutivos.

SOLUÇÕES