XXXIV OPM - 1ª Eliminatória - 11.11.2015 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção C. ($2 \times 6 \times 6$, *uma vez que há* 6 *formas de escolher a ordenação de cada tipo de diversão.*)
   (b) Opção C. (*Um adulto normal paga* 23€ *e um sénior paga* 17€. *Tem-se* $120 = 3 \times 23 + 3 \times 17$.)
   (c) Opção D. (*Os únicos caminhos possíveis são* $3-6-1-4-7-2-5$ *ou o inverso.*)
   (d) Opção B. (*Tem-se* $25 + x = 10 + 30$.)

2. O Paulo comeu um terço dos rebuçados que estavam no saco, portanto os 24 rebuçados que sobraram são $2/3$ dos rebuçados que a Ana deixou. Logo, a Ana deixou $24 \times 3/2 = 36$ rebuçados. Da mesma forma, como a Ana retirou um terço dos rebuçados do saco, os 36 rebuçados que sobraram são $2/3$ dos rebuçados que o José deixou. Portanto, o José deixou $36 \times 3/2 = 54$ rebuçados. Assim, o avô deixou-lhes $54 \times 3/2 = 81$ rebuçados, dos quais o José tirou $81/3 = 27$.

3. Como $\overline{AE} = \overline{BE}$ e $A\widehat{E}D = B\widehat{E}D = 90°$, então os triângulos $[AED]$ e $[BED]$ são congruentes. Em particular temos $D\widehat{A}E = D\widehat{B}E = C\widehat{B}A$. Por outro lado, como $[AD]$ é a bissetriz de $\angle BAC$ temos $B\widehat{A}C = 2\,B\widehat{A}D = 2\,C\widehat{B}A$. Somando as amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$ obtemos então

$$180° = C\widehat{B}A + A\widehat{C}B + B\widehat{A}C = C\widehat{B}A + 105° + 2\,C\widehat{B}A$$

de onde concluímos que $C\widehat{B}A = (180° - 105°)/3 = 25°$.

4. Recorde-se que como 100 é divisível por 4, um número é divisível por 4 se e só se o número formado pelos seus dois últimos algarismos o for. Entre 00 e 96 há $100/4 = 25$ terminações possíveis divisíveis por 4. Três destas (00, 44 e 88) repetem algarismos, pelo que não poderão ser usadas.

   Resta saber de quantas formas diferentes se pode completar cada terminação para formar um número de quatro algarismos todos distintos. Depois de fixar os últimos dois algarismos, restam 8 para usar e existem duas hipóteses:

   - Se já usámos o zero, o que acontece em seis casos ($04, 08, 20, 40, 60, 80$), então existem 8 possibilidades para a casa dos milhares restando depois 7 para a casa das centenas.
   - Se ainda não usámos o zero, o que acontece nos $25 - 3 - 6 = 16$ casos restantes, então existem apenas 7 escolhas para a casa dos milhares, já que se for zero o número não terá 4 algarismos. A casa das centenas tem ainda 7 possibilidades distintas.

   O senhor Abílio terá assim de comprar $6 \times 8 \times 7 + 16 \times 7 \times 7 = 1120$ bilhetes.