OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXIII OPM - Final - 2º Dia - 21.03.2015 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) O César tocou 2015 notas agrupadas em conjuntos de 8 notas. Dividindo 2015 por 8 obtém-se como quociente 251 e resto 7. Logo o César tocou 251 vezes a sequência das 8 notas e depois tocou mais 7 notas. A sétima nota da sequência é Sol. Opção correta: E)

   (b) Como $\overline{BC} = \overline{BD}$ e $\overline{AB} = \overline{AC}$, então $B\hat{C}D = B\hat{D}C = A\hat{B}C$. Usando a soma dos ângulos internos do triângulo $[BCD]$ ser $180°$ e $C\hat{B}D = \frac{1}{2}A\hat{B}C$, tem-se $C\hat{B}D = 36°$. Logo $A\hat{B}C = B\hat{C}D = 72°$ e $B\hat{A}C = 180 - 2 \times 72 = 36°$. Opção correta: B)

   (c) Aplicando a sequência de operações e analisando os primeiros números escritos pelo César: 11, 13, 15, 17, repara-se que de um número para o seguinte basta adicionar 2. Do número 11 ao primeiro número de 4 algarismos faltam 989, mas como se adicionam 2 em cada, ao fim de 495 repetições da sequência atinge-se o número 1001. Opção correta: A)

   (d) Uma vez que $(A + B) + (C + D) + (E + F) = (B + C) + (D + E) + (F + A)$, usando as somas conhecidas, tem-se $12 + 39 + 36 = 21 + (D + E) + 17$. Logo, $D + E = 49$. Opção correta: C)

5. No produto aparecem como fatores os números 10 (uma vez que $10 = 3\times 3+1$), 100 (já que $100 = 3\times 33+1$) e também 1000 (uma vez que $1000 = 3 \times 333 + 1$). Portanto, os últimos quatro (na realidade pelo menos seis) algarismos são iguais a zero.

6. Uma partida do jogo do catorze pode ser representada por uma sequência crescente de números, começando em 1 e acabando em 14, tal que dois termos consecutivos têm um divisor em comum, como por exemplo $(1, 7, 14)$, $(1, 2, 6, 14)$, $(1, 9, 12, 14)$ ou ainda $(1, 5, 10, 12, 14)$. Queremos contar quantas sequências destas contêm pelo menos 4 números (para o jogo ter pelo menos 3 jogadas).

   Com menos de 4 números, só há 8 sequências: $(1, 14)$, $(1, 7, 14)$, $(1, 2, 14)$, $(1, 4, 14)$, $(1, 6, 14)$, $(1, 8, 14)$, $(1, 10, 14)$ e $(1, 12, 14)$.

   Iremos contar todas as sequências que satisfazem as regras do jogo do catorze e no fim subtraímos as 8 sequências com menos de 4 números. Vamos construir as sequências do final para o ínicio. O último termo da sequência é 14 e o penúltimo tem um divisor em comum com 14: pode ser $1, 7$ ou qualquer número par entre 2 e 12. Se $J(n)$ designar o conjunto das sequências que satisfazem as regras do jogo do catorze mas que acabam em n, podemos descrever $J(14)$ à custa de alguns $J(n)$, com $n < 14$. De facto:

$$J(14) = \{(X, 14) : X \in J(1) \cup J(2) \cup J(4) \cup J(6) \cup J(7) \cup J(8) \cup J(10) \cup J(12)\}.$$

   Assim reduzimos a contagem das sequências em $J(14)$ a uma soma de contagens de sequências em $J(n)$ para $n = 1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12$. Como podemos ver, para construir $J(14)$ vamos precisar de explicitar quase todos os $J(n)$ com $n = 1, \ldots, 13$. De facto, temos:

$$J(1) = \{(1)\}$$
$$J(2) = \{(1, 2)\}$$
$$J(3) = \{(1, 3)\}$$
$$J(4) = \{(X, 4) : X \in J(1) \cup J(2)\} = \{(1, 4), (1, 2, 4)\}$$
$$J(5) = \{(1, 5)\}$$
$$J(6) = \{(X, 6) : X \in J(1) \cup J(2) \cup J(3) \cup J(4)\} = \{(1, 6), (1, 2, 6), (1, 3, 6), (1, 4, 6), (1, 2, 4, 6)\}$$
$$J(7) = \{(1, 7)\}$$

$$
\begin{aligned}
J(8) &= \{(X,8) : X \in J(1) \cup J(2) \cup J(4) \cup J(6)\} \\
J(9) &= \{(X,9) : X \in J(1) \cup J(3) \cup J(6)\} \\
J(10) &= \{(X,10) : X \in J(1) \cup J(2) \cup J(4) \cup J(5) \cup J(6) \cup J(8)\} \\
J(12) &= \{(X,12) : X \in J(1) \cup J(2) \cup J(3) \cup J(4) \cup J(6) \cup J(8) \cup J(9) \cup J(10)\} \\
J(14) &= \{(X,14) : X \in J(1) \cup J(2) \cup J(4) \cup J(6) \cup J(7) \cup J(8) \cup J(10) \cup J(12)\}
\end{aligned}
$$

Contando agora quantos elementos tem cada $J(n)$, temos:

$$
\begin{aligned}
\#J(1) &= 1 \\
\#J(2) &= 1 \\
\#J(3) &= 1 \\
\#J(4) &= \#\#J(2) = 1 + 1 = 2 \\
\#J(5) &= 1 \\
\#J(6) &= \#J(1) + \#J(2) + \#J(3) + \#J(4) = 1 + 1 + 1 + 2 = 5 \\
\#J(7) &= 1 \\
\#J(8) &= \#J(1) + \#J(2) + \#J(4) + \#J(6) = 1 + 1 + 2 + 5 = 9 \\
\#J(9) &= \#J(1) + \#J(3) + \#J(6) = 1 + 1 + 5 = 7 \\
\#J(10) &= \#J(1) + \#J(2) + \#J(4) + \#J(5) + \#J(6) + \#J(8) = 1 + 1 + 2 + 1 + 5 + 9 = 19 \\
\#J(12) &= \#J(1) + \#J(2) + \#J(3) + \#J(4) + \#J(6) + \#J(8) + \#J(9) + \#J(10) \\
&= 1 + 1 + 1 + 2 + 5 + 9 + 7 + 19 = 45 \\
\#J(14) &= \#J(1) + \#J(2) + \#J(4) + \#J(6) + \#J(7) + \#J(8) + \#J(10) + \#J(12) \\
&= 1 + 1 + 2 + 5 + 1 + 9 + 19 + 45 = 83
\end{aligned}
$$

Portanto, o número de maneiras diferentes que há de jogar o jogo do catorze com pelo menos 3 jogadas é igual a: $\#J(14) - 8 = 83 - 8 = 75$.