XXXIII OPM - Final - 2º Dia - 21.03.2015 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Como PQ e BC são paralelas, tem-se área $[PCQ]$ =área$[PBQ] = 2$.

   Como PC e AB são paralelas, tem-se área $[ABC]$ =área$[ABP] = 6$. Logo área $[ADC] = 6$.

   Como $[QPC]$ e $[ADC]$ são semelhantes, então área $[QPC] = \left(\frac{\overline{PC}}{\overline{CD}}\right)^2$ área$[ADC]$, pelo que $\frac{\overline{PC}}{\overline{CD}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

   Como PC e AB são paralelas, tem-se área $[PBC]$ =área$[PAC] = \frac{\overline{PC}}{\overline{CD}}$área$[ADC] = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

5. Primeiro observemos que $a_0 > 0$, pois se $a_0 = 0$, todos os elementos da sequência, inclusivamente a_0, seriam positivos, contradição.

   Como $a_1 + \cdots + a_{2015}$ é igual ao número total de elementos positivos, que é o número de elementos positivos de $a_1, \ldots, a_{2015}$ mais 1 (porque $a_0 > 0$), então cada um desses a_i positivos é igual a 1 exceto um deles, que é igual a 2.

   Portanto cada a_i só pode ser igual a 0, 1 2, ou a_0, ou seja, há no máximo 4 elementos da sequ,ência positivos. Logo há pelo menos 2012 elementos da sequência nulos, ou seja, $a_0 \geq 2012$. Então $a_0 \neq 0, 1, 2$, logo há exatamente 2012 elementos da sequência nulos, donde $a_0 = 2012$.

   Portanto a única possibilidade para uma sequência medalhada com 2016 elementos é

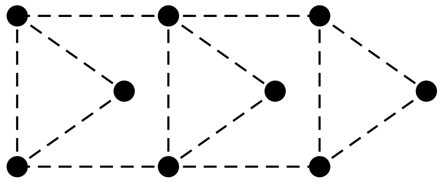
$$(a_0, \ldots, a_{2015}) = (2012, 2, 1, 0, 0, \ldots, 0, 0, 1, 0, 0, 0).$$

6. São precisos pelo menos quatro pontos. Se existir uma configuração com quatro pontos, três deles formam um triângulo equilátero de lado 1. O quarto ponto está à mesma distância dos outros três, e portanto é o circuncentro do triângulo equilátero. Num triângulo equilátero de lado 1, o circuncentro está a uma distância inferior a 1 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ é o valor exato}\right)$ de cada um dos vértices, e portanto é impossível marcar 4 pontos no plano de modo que cada um deles esteja à distância 1 dos outros três.

   Se existir uma configuração com cinco pontos, cada um deles tem três ou quatro pontos à distância 1. Se todos tiverem apenas três pontos à distancia 1, cada um deles tem um, e apenas um, ponto a uma distância diferente de 1, o que é impossível porque o número de pontos é ímpar. Ou seja, quatro pontos estão sobre uma circunferência de raio 1 e centro no quinto ponto. Numa circunferência, dois pontos estão a uma distância igual ao comprimento do raio se o ângulo ao centro formado pelos seus raios for 60^o, e é impossível colocar 4 pontos sobre uma circunferência de modo a que cada um deles esteja a um ângulo de 60^o de outros dois. Concluímos que para $n \leq 5$, não é possível marcar n pontos no plano de modo que cada ponto tenha pelo menos três outros pontos a distância 1.

   Vamos a seguir verificar que para $n \geq 6$, existem configurações nas condições do enunciado. Marcamos no plano três pontos, de modo a que formem um triângulo equilátero de lado 1. De seguida marcamos mais três pontos, que resultam dos três primeiros através de uma translação de uma unidade (de modo a que não haja sobreposição dos pontos). Se continuarmos este processo, obtemos uma configuração com $3k$ pontos, $k \geq 2$, de modo que cada ponto tem três outros pontos a distância 1.

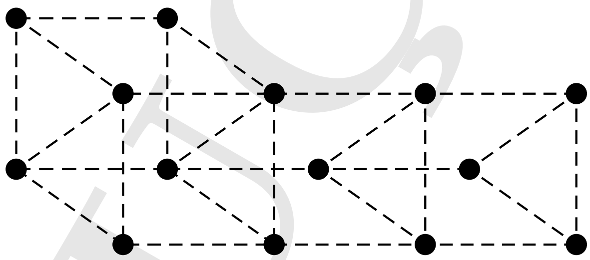
SOLUÇÕES



Configuração com $9 = 3 + 3 + 3$ pontos.

Para $n = 7$, marcamos os seis vértices de um hexágono regular de lado 1 e o seu centro. Cada dois vértices consecutivos e o centro formam um triângulo equilátero de lado 1. Se fizermos a translação de um desses triângulos, como no caso anterior, obtemos uma configuração, nas condições do enunciado, com $7 + 3k$ pontos.

Para $n = 8$, marcamos no plano quatro pontos, de modo a que formem um quadrado de lado 1. De seguida marcamos mais quatro pontos, que resultam dos quatro primeiros através de uma translação de uma unidade, de tal modo que o vetor da translação faça um ângulo de 60^o com um lados do quadrado. Cada um destes oito pontos tem pelo menos três outros pontos a distância 1. Pela maneira como a translação foi definida, três desses pontos formam um triângulo equilátero, e procedendo como nos casos anteriores, obtemos uma configuração, nas condições do enunciado, com $8 + 3k$ pontos.



Configuração com $14 = 8 + 3 + 3$ pontos.

Podemos então concluir que para $n \geq 6$, é possível marcar n pontos no plano de modo que cada ponto tenha pelo menos três outros pontos a distância 1.

SOLUÇÕES