XXXIII OPM - Final - 1º Dia - 20.03.2015 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Seja $N = 100a + 10b + c$. Se $c(10a + b) = 100a + 10b + c = 10(10a + b) + c$, então c é múltiplo de $10a + b$, o que é impossível.

   Então $c(10b + a) = 100a + 10b + c$, ou seja, $c(10b + a - 1) = 10(10a + b)$. Portanto $c = 5$ ou $10b + a - 1$ é múltiplo de 5, ou seja, $c = 5$ ou $a = 1$ ou $a = 6$.

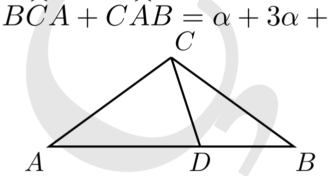
   Se $c = 5$, então $5(10b + a - 1) = 10(10a + b)$, ou seja, $8b = 19a + 1$, o que é impossível com $0 \leq a, b \leq 9$.

   Se $a = 1$, então $c(10b + 1) = 100 + 10b + c$, ou seja, $b(c - 1) = 10$. Obtemos as soluções $b = 2, c = 6$ e $b = 5, c = 3$, que correspondem aos números $N = 126$ e $N = 153$.

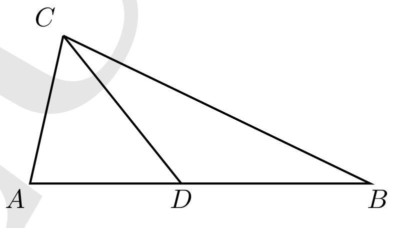
   Se $a = 6$, então $c(10b + 6) = 600 + 10b + c$, ou seja, $2b(c - 1) = 120 - c$. Obtemos as soluções $b = 8, c = 8$ que correspondem aos números $N = 688$.

2. Seja $\alpha = A\widehat{B}C$. Há vários casos a considerar, conforme os lados que são iguais em cada triângulo.

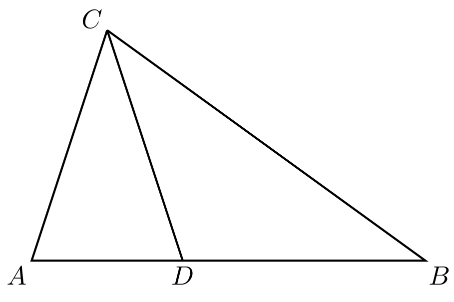
   - $\overline{AC} = \overline{AD}$
     Neste caso temos $A\widehat{D}C = A\widehat{C}D < 90$. Logo $B\widehat{D}C > 90$, pelo que $\overline{DC} = \overline{BD}$.
     Logo $A\widehat{D}C = 2A\widehat{B}C = 2\alpha$.
     Se $\overline{BC} = \overline{AC}$, então $180 = A\widehat{B}C + B\widehat{C}A + C\widehat{A}B = \alpha + 3\alpha + \alpha = 5\alpha$, pelo que $\alpha = 36°$.



     Se $\overline{BC} = \overline{AB}$, então $B\widehat{A}C = 90 - \alpha/2$. Logo $180 = A\widehat{D}C + D\widehat{C}A + C\widehat{A}D = 2\alpha + 2\alpha + 90 - \alpha/2 = 7\alpha/2$, pelo que $\alpha = \dfrac{180°}{7}$.

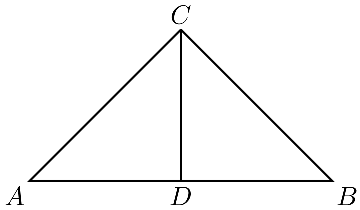


   - $\overline{AC} = \overline{CD}$
     Neste caso temos $A\widehat{D}C = D\widehat{A}C < 90$. Como anteriormente, conclui-se que $\overline{DC} = \overline{BD}$. Então $\overline{AB} = \overline{BC}$. Logo $180 = A\widehat{D}C + D\widehat{C}A + C\widehat{A}D = 2\alpha + \alpha + 2\alpha = 5\alpha$, pelo que $\alpha = 36°$.



SOLUÇÕES

- $\overline{CD} = \overline{AD}$
  Se $\overline{BD} = \overline{CD}$, então tanto $\overline{AC}$ como $\overline{BC}$ são inferiores a $\overline{AD} + \overline{DC}$, pelo que $\overline{AC} = \overline{BC}$. Logo $180 = 4\alpha$, pelo que $\alpha = 45°$.



  Os restantes casos foram já analisados anteriormente, trocando os pontos A e B. Obtemos assim os valores possíveis $\alpha = \dfrac{540°}{7}$ e $\alpha = 72°$.

3. Como $3-1=2$, $6-1=5$, $8-1=7$, $6-3=3$, $8-3=5$ e $8-6=2$ são números primos, então os números $1, 3, 6$ e 8 têm que ficar em folhas diferentes. Logo são necessárias pelo menos 4 folhas.

   Para mostrar que 4 folhas são suficientes, basta observar que colocando na folha $i = 0, 1, 2, 3$, os números cujo resto da divisão por 4 é i, a diferença entre dois números na mesma folha é um múltiplo de 4, logo não é um número primo.

SOLUÇÕES