Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Como $13! = 2^{10}\times 3^5\times 5^2\times 7\times 11\times 13$, então $13!$ tem $(10+1)\times(5+1)\times(2+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1) = 1584$ divisores.

   Como $14! = 2^{11}\times 3^5\times 5^2\times 7^2\times 11\times 13$, então $14!$ tem $(11+1)\times(5+1)\times(2+1)\times(2+1)\times(1+1)\times(1+1) = 2592$ divisores.

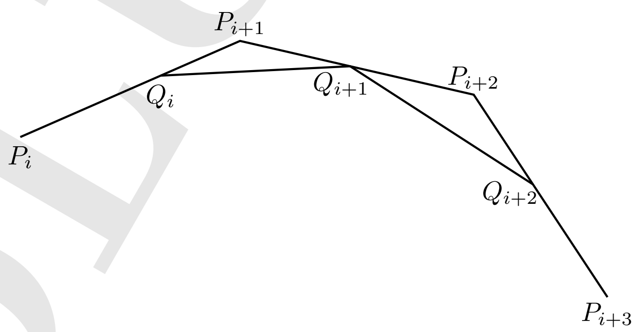
   Logo o número pretendido é 14.

5. Em geral quando queremos colocar um azulejo isolado temos quatro possibilidades, mas isso não é o caso se alguns vizinhos já estiverem colocados. Em primeiro lugar podemos concluir que se quisermos colocar um azulejo em que dois lados adjacentes (digamos o lado esquerdo e o de cima) toquem em azulejos já colocados, então existe uma e uma só escolha para esse azulejo que obedece às condições. Se quisermos colocar um azulejo em que um lado apenas toque um azulejo já colocado, temos duas opções. Procedemos então da seguinte forma:

   - Colocamos o azulejo do canto superior esquerdo (4 possibilidades)
   - Colocamos 1 a 1 a começar do azulejo imediatamente abaixo do previamente colocado todos os azulejos da primeira coluna. São $m-1$ e pelas observações acima temos duas possibilidades para cada um, logo há um total de 2^{m-1} possibilidades.
   - Procedemos agora analogamente preenchendo da esquerda para a direita a linha de cima, obtendo 2^{n-1} hipóteses.

   Assim, para preencher a primeira coluna e a primeira linha temos $4\times 2^{m-1}\times 2^{n-1} = 2^{m+n}$ hipóteses. Todos os outros azulejos têm agora uma e uma só forma de ser preenchidos, colocando os azulejos, linha a linha, da esquerda para a direita. Assim temos 2^{m+n} pavimentações distintas.

6. Sejam $P_1, \cdots P_n$ os vértices do polígono regular de n lados, e $Q_1, \cdots Q_n$ pontos escolhidos nos lados desse polígono, com Q_i pertencente a $[P_i, P_{i+1}]$ para $i = 1, \cdots n$ (note-se que para simplificar a notação identificamos P_1 e Q_1 com P_{n+1} e Q_{n+1} respetivamente). Se o polígono com vértices $Q_1, \cdots Q_n$ tiver todos os ângulos internos iguais, então serão iguais a $180° - 360°/n$, ou seja, iguais aos do polígono regular original.



   Note-se que pela soma dos ângulos internos de um triângulo

$$Q_i\widehat{P_{i+1}}Q_{i+1} + P_{i+1}\widehat{Q_{i+1}}Q_i + Q_{i+1}\widehat{Q_i}P_{i+1} = 180°$$

   e assim

$$P_{i+1}\widehat{Q_{i+1}}Q_i + Q_{i+1}\widehat{Q_i}P_{i+1} = 180° - (180° - 360°/n) = 360°/n.$$

Por outro lado, como $\angle P_{i+1}Q_{i+1}P_{i+2}$ é um ângulo raso

$$P_{i+1}\widehat{Q_{i+1}}Q_i + Q_i\widehat{Q_{i+1}}Q_{i+2} + Q_{i+2}\widehat{Q_{i+1}}P_{i+2} = 180^\circ$$

e temos

$$P_{i+1}\widehat{Q_{i+1}}Q_i + Q_{i+2}\widehat{Q_{i+1}}P_{i+2} = 180^\circ - (180^\circ - 360^\circ/n) = 360^\circ/n,$$

pelo que $Q_{i+1}\widehat{Q_i}P_{i+1} = Q_{i+2}\widehat{Q_{i+1}}P_{i+2}$. Como também $Q_i\widehat{P_{i+1}}Q_{i+1} = Q_{i+1}\widehat{P_{i+2}}Q_{i+2} = 180^\circ - 360^\circ/n$ então todos os triângulos $[Q_iP_{i+1}Q_{i+1}]$ são semelhantes.

Consideremos sem perda de generalidade que os lados do polígono regular original medem 1 e seja $\overline{Q_1P_2} = l$, enquanto $\overline{P_2Q_2} = rl$. Pela semelhança que vimos anteriormente temos então que $\overline{P_iQ_i} = r\overline{Q_{i-1}P_i}$ para todo i. Por outro lado $\overline{Q_{i-1}P_i} = 1 - \overline{Q_{i-1}P_{i-1}}$. Assim temos

$$\begin{array}{ll}
\overline{Q_2P_3} = 1 - rl\,, & \overline{P_3Q_3} = r(1-rl) = r - r^2l, \\
\overline{Q_3P_4} = 1 - r + r^2l, & \overline{P_4Q_4} = r - r^2 + r^3l, \\
\overline{Q_4P_5} = 1 - r + r^2 - r^3l, & \overline{P_5Q_5} = r - r^2 + r^3 - r^4l, \\
\vdots &
\end{array}$$

Repetindo $n+1$ vezes vem que

$$l = \overline{Q_1P_2} = \overline{Q_{n+1}P_{n+2}} = 1 - r + r^2 - r^3 + \cdots + (-1)^n r^n l$$

ou seja

$$l(1-(-1)^n r^n) = 1 - r + r^2 - r^3 + \cdots + (-1)^{n-1}r^{n-1}.$$

Usando as propriedades das somas geométricas:

$$l(1-(-1)^n r^n) = \frac{1-(-1)^n r^n}{1+r}.$$

Se $r \neq 1$ ou n for ímpar, temos que $(1-(-1)^n r^n) \neq 0$ e assim $l = \frac{1}{1+r}$. Mas é fácil ver que nesse caso $\overline{P_iQ_i} = \frac{1}{1+r}$ e $\overline{Q_iP_{i+1}} = \frac{r}{1+r}$ para todo i, pelo que todos os triângulos $[Q_iP_{i+1}Q_{i+1}]$ são de facto congruentes, e portanto o polígono cujos vértices são os Q_i é regular.

Resta ver o que acontece se n é par e $r = 1$, isto é, se os triângulos $[Q_iP_{i+1}Q_{i+1}]$ forem isósceles. É fácil ver que nesse caso podemos fazer

$$\begin{array}{ll}
\overline{Q_1P_2} = 1/4\,, & \overline{P_2Q_2} = 1/4, \\
\overline{Q_2P_3} = 3/4\,, & \overline{P_3Q_3} = 3/4, \\
\overline{Q_3P_4} = 1/4, & \overline{P_4Q_4} = 1/4, \\
\vdots &
\end{array}$$

Obtemos assim um polígono de n lados nas condições pretendidas, pelo que estes existem se e só se n for par.