OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXI OPM - Final - 2º dia - 16.03.2013 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. As informações dadas podem ser representadas numa tabela que indica os idiomas falados por cada amigo. As três primeiras informações permitem completar a tabela do seguinte modo:

	A	B	C	D	E
Inglês		✓	✓		X
Português		✓	✓	✓	X
Francês	✓	✓	X		✓
Alemão			✓		✓
Espanhol					

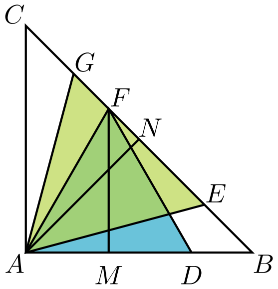
Como o idioma mais falado é o português, então A também tem que falar português. Portanto D é o amigo que fala apenas uma língua, o português. Como há três amigos que falam espanhol e C e E não têm esta língua em comum, então A e B falam espanhol. A tabela pode assim ser preenchida do seguinte modo:

	A	B	C	D	E
Inglês		✓	✓	X	X
Português	✓	✓	✓	✓	X
Francês	✓	✓	X	X	✓
Alemão			✓	X	✓
Espanhol	✓	✓		X	

Conclui-se então que E é o amigo que fala dois idiomas, que C fala espanhol, que A fala três idiomas e B fala os cinco idiomas.

	A	B	C	D	E
Inglês	X	✓	✓	X	X
Português	✓	✓	✓	✓	X
Francês	✓	✓	X	X	✓
Alemão	X	✓	✓	X	✓
Espanhol	✓	✓	✓	X	X

5. Sejam M e N os pontos médios de $[AD]$ e $[BC]$, respetivamente.



Como $[ADF]$ é equilátero, então $[FM]$ é perpendicular a $[AM]$. Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se

$$\overline{MF} = \sqrt{\overline{AF}^2 - \overline{AM}^2} = \sqrt{1^2 - (1/2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como $[ABC]$ e $[MBF]$ são semelhantes, então $\overline{MB} = \overline{MF} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Por outro lado, tem-se $\overline{AN} = \overline{NB}$ e, novamente pelo Teorema de Pitágoras, tem-se $\overline{AN}^2 + \overline{NB}^2 = \overline{AB}^2$, ou seja, $2\,\overline{AN}^2 = (1/2 + \sqrt{3}/2)^2 = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Logo $\overline{AN} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$.

Além disso, $\overline{AE}^2 - \overline{NE}^2 = \overline{AN}^2$, ou seja, $\overline{AE}^2 - (\overline{AE}/2)^2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$. Portanto $\overline{AE} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}}$.

6. A Liliana tem $4^8 = 65536$ maneiras de colocar 8 azulejos numa diagonal da parede. Na diagonal imediatamente acima da já preenchida, cada azulejo partilha dois lados com azulejos já colocados pelo que existe uma única maneira de a preencher. O mesmo acontece para a diagonal imediatamente abaixo e para as restantes diagonais.

   Assim conclui-se que depois de colocada a primeira diagonal, a Liliana tem uma única forma de completar a parede, pelo que há um total de 65536 pavimentações distintas.